

أسس المنطق الرمزي

تأليف

الدكتور عزمي إسماعيل

١٩٧٠

مركز الطباعة والنشر
مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ شارع محمد فريد - القاهرة

إهداء ٢٠٠٧

**الأستاذ الدكتور / قنري محمود حفني
جمهورية مصر العربية**

أسس المنطق البرمزي

تأليف

الدكتور عزمي إبراهيم

١٩٧٠

مركز الطباعة والنشر
مكتبة الأنجلو المصرية
١٦٥ شارع محمد فريد - القاهرة

الإهداء

إلى الأستاذ الدكتور زكي نجيب محمود

فهرس

صفحة	الموضوع
ز	مقدمة
٢٧-١	<u>الفصل الأول :</u>
	مدخل إلى للنطق الرمزي
١	موضوع علم للنطق
٢	تقد للنطق القديم
١٠	لنطق الرمزي الجديد
٢٢	تطور للنطق المعاصر
١٣٨-٢٨	<u>الفصل الثاني :</u>
٢٨	الحساب التحليلي للفتات
٩٦	الاستدلال الخاص بقضايا الفتات
٢٦٦-١٣٩	<u>الفصل الثالث :</u>
١٣٩	الحساب التحليلي للقضايا
١٦٠	الاستدلال الخاص بالقضايا
٣٢٩-٢٦٧	<u>الفصل الرابع :</u>
٢٦٧	الحساب التحليلي لبدالات القضايا
٣١٦	الاستدلال الخاص ببدالات القضايا ، والقضايا ذات الأمور
٣٧٤-٣٣١	<u>الفصل الخامس :</u>
٣٣١	الحساب التحليلي للعلاقات
٣٧٣	الاستدلال الخاص بالعلاقات
٣٧٥	قائمة بأهم الرموز
٣٧٩	قائمة بأهم المراجع : العربية
٣٨١	قائمة بأهم المراجع : الأجنبية

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

عرشنا من هذا الكتاب ، تقديم للنطق الرمزي إلى القارئ العربي في صورة مبسطة ، عن طريق توضيح أسسه وأهم مفاهيمه . ونود في هذه المقدمة أن نتوجه بأن هدفنا من هذا الكتاب لم يكن هو تقديم عرض مفصل لتاريخ النطق الرمزي للعاصر ، يوضح الإضافات المستمرة التي أضافها الناطقة واحد بعد الآخر . فهذا عرض يخرج عن مجال كتاب يعرض لأسس للنطق الرمزي . ولقد اكتفينا في هذا العدد بالإشارات التاريخية التي أوردناها في الفصل الأول وكذا في هوامش بعض الصفحات .

كما أننا لم نهدف من هذا الكتاب إلى تقديم عرض كامل للنظرية العامة للاستدلال في ضوء النطق الرمزي ، إذ أن هذه دراسة تبدأ على مستوى يتلو مستوى التعرف على أسس للنطق الرمزي ، وهو المستوى الذي وضع كتابنا الحالي لتبسيطه وتحليله . ولقد اكتفينا بذكر بعض أنواع الاستدلالات الخاصة بكل موضوع من موضوعات للنطق الرمزي الرئيسية ، ثم عقبنا على كل موضوع منها ، بذكر أهم الاستدلالات المتعلقة به . كما أنه من الطبيعي ألا يكون هدفنا من هذا الكتاب تقديم عرض للنطق الصوري القديم ، وقد اكتفينا في الفصل الأول بذكر أهم ما وجه من نقد للنطق التقليدي ، وذلك تمهيداً لتوضيح حاجة الفكر للنطق إما إلى إصلاح للنطق القديم ، أو لاصطناع منطق آخر جديد خالٍ من تلك النقائص والعيوب التي تم الكشف عنها في للنطق القديم .

ولقد قسمنا الكتاب إلى خمسة فصول ، أولها بمثابة للدخل أو التمهيد للنطق الرمزي ، تناولنا فيه موضوع للنطق ، وكذا عيوب للنطق القديم ، ثم عرشنا فيه

(ح)

للمنطق الرمزي ، من حيث تعريفه ، ومبررات ظهوره وتطوره .

أما الفصول الأربعة الباقية ، فقد خصصنا كل واحد منها قسم من أقسام المنطق
الرمزي ، وهي على الترتيب :-

١ - الحساب التحليلي للكمات .

٢ - الحساب التحليلي للقضايا .

٣ - الحساب التحليلي لدالات القضايا .

٤ - الحساب التحليلي للعلاقات .

حقاً إن العادة قد جرت على تقسيم موضوعات المنطق الرمزي إلى ثلاثة أقسام
هي (حساب القضايا ، وحساب الكمات ، وحساب العلاقات) ، وذلك على
النحو الذي أورده رمل في كتابه « أصول الرياضيات » (الجزء الأول ،
صفحة ١٣) . إلا أنني قد فضلت في هذا الكتاب أن أخصص للحساب
التحليلي لدالات القضايا فصلاً مستقلاً ، بفرض زيادة التبسيط والتوضيح ،
وهو الهدف الذي حاولت الالتزام به قدر استطاعتي على طول هذا الكتاب ،
وأرجو أن أكون قد وفقت في بلوغيه .

عزمي اسلام

الفصل الأول

مدخل إلى المنطق الرمزي

موضوع علم للنطق :

موضوع للنطق هو الاستدلال ، حتى ليعرفه بعض الناطقة أحياناً بأنه « علم الاستدلال » . والاستدلال عادة ما يكون على صدق أو كذب قول أو قضية ، بناء على صدق أو كذب قضية أو قضايا أخرى تعتبر بمثابة المقدمة ، أو المقدمات ، للقضية المعنية . وللاستدلال في المنطق قواعد تتبع حتى يكون صحيحاً Valid ، وإلا كان باطلاً غير صحيح .

والاستدلال في المنطق التقليدي يدور أساساً حول القياس ، وهو نوع من الاستدلال غير المباشر الذي يبدأ بمقدمتين منتهياً إلى نتيجة تبين صدقها ، بناء على لزومها لزوماً ضرورياً عن المقدمتين اللتين إقرضنا صدقهما ، وذلك وفقاً لقواعد معينة تعرف بقواعد القياس . وبما أن الاستدلال عملية عقلية ، فقد جرت العادة على تعريف المنطق التقليدي بأنه علم التفكير الصحيح ، أي أنه كان للوضوح الذي يتم حوله التفكير . ومن ثم فقد قيل أنه « العلم الذي يبحث في صورة الفكر » . وصورة الفكر هي القالب أو الأطار الذي تترايط فيه التصورات والأفكار وفقاً لعلاقات معينة : بعض النظر عن مضمون تلك التصورات نفسها .

وعلى ذلك يمكن القول :

١ — بأن موضوع المنطق التقليدي ، كان هو الاستدلال بعامته ، والاستدلال

التقليدي بخاصته .

٢ — وبأن الصورية هي السمة الأساسية التي يتسم بها هذا المنطق .

تقد للمنطق القديم :

ظلت السيادة معقودة للمنطق الأرسطي بعنائه التقليدي ، على الفكر الإنساني ما يزيد على ألفي عام ، باعتبارها الأداة الوحيدة لكل تفكير صحيح . إلى أن تبين للمناطقة والفكرين أن القياس ، وهو المحور الأساسي الذي يقوم عليه الاستدلال في المنطق القديم ، به من العيوب والنقائص ما يبرر التخلي عنه أساساً للتفكير الاستدلالي . كما تبين لهم أن الصورية ، ليست هي السمة للمبرة تعبيراً كاملاً وحقيقياً عن طبيعة المنطق القديم . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي :—

أولاً : تقد القياس :

ترتب على اكتشاف العديد من النقائص والعيوب في القياس ، أن رفضه كثير من المناطقة والعلماء والفلاسفة ، وجاء رفضهم هذا مبرراً عن اتجاهين :—

(١) إتجاه علمي يرى في القياس ، بل وفي المنطق التقليدي كله ، أداة عاجزة عن تطوير العلم . ولقد بدأ هذا الاتجاه بمحاولات روجر بيكون Roger Bacon (+ ١٢٩٤) في القرن الثالث عشر ، ثم تمثل بصفة خاصة في تقد فرانسيس بيكون F. Bacon (+ ١٦٢٦) في القرن السابع عشر ، للمنطق التقليدي ، وذلك في كتابه « الأورجانون الجديد » Novum Organum الذي نشر عام ١٦٢٠ ، والذي ذهب فيه بيكون إلى القول بأن (المنطق للوجود لدينا الآن لا يساعدنا على التوصل إلى علوم جديدة أو إلى الكشف عنها)^(١) ، بل وإلى أكثر من هذا ، فهو لم يكن يرى في المنطق القديم مجرد أداة عقيمة غير مثمرة في التفكير العلمي ،

بل كان يراه أيضاً عبء كاداء في طريق تفهم العلم وذلك بتوجيه للأخطاء التي تعود عليها المفكر . ويتجمل هذا المعنى في قوله : (إن للنطق المستعمل الآن إنعما يساعد على تثبيت ورسوخ الأخطاء التي ترجع في أساسها إلى أفكار شائعة تزودنا بها من قبل ، أكثر مما يساعد على الكشف عن الصدق والحق . ولذا كان ضرره أكثر من نفعه) (١) .

(ب) إجابة منطقي يرى في القياس أداة عاجزة عن تحقيق التفكير المنطقي السليم أو إستيفاء الاستدلالات المنطقية الصحيحة بصفة عامة ، وغير القياسية بصفة خاصة . ويمكن تلخيص أهم ما وجه من نقد في هذا الصدد إلى القياس على النحو الآتي : —

١ — من حيث التعريف : يعرف أرسطو القياس في كتابه التحليلات الأولى بأنه كل قول قدم له بمقدمات معينة ، فلتزم عنها بالضرورة شيء غير تلك المقدمات ومعنى ذلك إننا نستطيع الاستنتاج من أكثر من مقدمة . إلا أنه يحمل عـدد للمقدمات مقصوراً على إثنين فقط أثناء تطبيقه لنظرية القياس ، فيرى أنه مكون من مقدمتين ونتيجة . وعلى ذلك فإن تعريف القياس عند أرسطو — على حد تعبير جوزيف (٢) — أوسع من تطبيقه ، بمعنى أنه لا يلتزم أثناء التطبيق ، بما افترضه أثناء التعريف . (٣)

Ibid. cl. XII.

(١)

Joseph. H.W.: An Introduction to Logic. P. 248

(٢)

(٣) ولقد سبق المفكر العربي ابن تيمية (١٢٦٣ — ١٣٢٨ م) إلى القول بمثل

هذا النقد وإلى غيره في كتابه « الرد على المنطقيين » . انظر في هذا الدراسة التي نشرها مؤلف هذا الكتاب بعنوان « ابن تيمية والرد على المنطق الأرسطي » بمجلة الكاتب ،

العدد ٩٧ ، إبريل ١٩٦٩ .

٢ — من حيث عدد القدمات : يرى أرسطو أن القياس يتكون من مقدمتين ونتيجة في حين أن الاختصار على مقدمتين فقط لا يوجد ما يبرره في عملية الاستدلال . وفي هذا الصدد يقول المفكر العربي ابن تيمية : (وأما قولهم « أن الاستدلال لا بد فيه من مقدمتين بلا زيادة ولا نقصان » ، فهو قول باطل طردا وعكسا ، وذلك أن إحتياج الاستدل إلى القدمات مما يختلف فيه حال الناس . فمن الناس من لا يحتاج إلا إلى مقدمة واحدة لعلمه بما سوى ذلك ومنهم من يحتاج إلى مقدمتين أو أكثر (١) ، وطى ذلك (فتخصيص العدد باثنين دون ما زاد تحكم لا معنى له) (٢) أو هو (قول لا دليل عليه ، بل هو باطل) . (٣)

٣ — من حيث تصنيف المقدمتين إلى كبرى وصغرى : يرى دعاة المنطق التقليدى ضرورة أن تكون إحدى المقدمتين كبرى والأخرى صغرى ، في حين أننا نستطيع أن نستنتج نتيجة صحيحة من مقدمتين متساويتين ليست فيهما ما هي كبرى ولا ما هي صغرى ، (٤) مثل : $a = b$ ، $b = c$ ، $c = a$.

٤ — من حيث العلاقة التي تربط بين حدود القياس : فالقياس التقليدى كان يقوم على قضايا حملية تكون من موضوع وعـمـول ، يرتبطان بعلاقة التضمن أو الأشتمال ، بحيث يكون المحمول مشتملا على الموضوع ومتضمنا له ، ويكون الموضوع مندرجا تحت المحمول متنيا إليه . وهذا من شأنه — على حد تعبير رسل — أن يضيق من مجال الاستدلال فيجعله قائما على أساس هذا النوع من العلاقة ، في حين .

(١) ابن تيمية : الرد على المنطقيين صفحة ١٦٨ .

(٢) المرجع السابق . صفحة ١٧٥ .

(٣) المرجع السابق . صفحة ١٦٢ .

(٤) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى . الجزء الأول : صفحة ٢٤٨ .

أن هناك لتولها كثيرة من العلاقات التي يمكن أن تربط بين مقصود القضية،
كالعلاقات الزمانية أو المكانية أو غير ذلك .

• — من حيث الحكم في قضايا القياس: يحدد المنطق التقليدي كم قضايا القياس،
بناء على كم الموضوع مع إغفال كم المحمول ، وهو بهذا يحمل القضايا المستخدمة في
القياس مقصورة على المحصورات الأربع (الكلية الموجبة والكلية السالبة ، والجزئية
الموجبة والجزئية السالبة) ، في حين أننا نستطيع — كما يرى ولیم هاملتون —
أن نبدأ من ثمان قضايا أساسية بدلا من أربع . وهذا يتيح لنا أن نستنتج عددا
أكبر من النتائج التي قد تتوصل إليها لو إقتصرننا على القضايا الأربع التقليدية .
ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي :— (١)

- ١ — قضية كل كلية موجبة : كل ا هي كل ب ، ويرمز لها بالرمز : U
- ٢ — قضية كل جزئية موجبة : كل ا هي بعض ب ، A D D D
- ٣ — قضية كل كلية سالبة : لا ا هي اى ب ، E D D D
- ٤ — قضية كل جزئية سالبة : لا ا هي بعض ب ، η D D D
- ٥ — قضية جزء كلية موجبة : بعض ا هي كل ب ، y D D D
- ٦ — قضية جزء جزئية موجبة : بعض ا هي بعض ب ، I D D D
- ٧ — قضية جزء كلية سالبة : بعض ا ليس اى ب ، O D D D
- ٨ — قضية جزء جزئية سالبة : بعض ا ليس بعض ب ، w D D D

٦ — من حيث جدوى القياس وفائدته : فالقياس بمعناه التقليدي لا يضيف إلى
معرفتنا معرفة جديدة بل يكرر في النتيجة ما كنا نعرفه من قبل في المقدمات ،

وقد فهو في حقيقته مجرد تحصيل حاصل . وقد كان أرسطو يرى أن القياس ينتهي إلى نتائج جديدة تختلف عن المقدمات التي بدأنا منها ، وذلك ما يتضح من تعريفه للقياس على النحو سالف الذكر . إلا أن ما يلزم عن المقدمات في حقيقة الأمر لا يكون شيئا آخر غير تلك المقدمات ، بل هو متضمن فيها ثم أبرزناه أو خصصناه في النتيجة . ففي القياس التالي مثلا :

كل طلبه قسم الفلسفة يدرسون المنطق

محمد طالب بقسم الفلسفة

إذن محمد يدرس المنطق

نجد أن صدق المقدمة الكبرى معناه شمول الحكم فيها لجميع طلبه قسم الفلسفة واتصافهم بهذه الصفة . فإذا ما عقينا على ذلك بالقول أن محمدا هو أحد هؤلاء الطلبة ، فأننا لا نقول شيئا جديدا ، لأننا نعرف بالفعل أنه أحد أفراد هذه الفئة . أما إذا لم نكن نعرف أنه واحد من أعضاء هذه الفئة ، لم يكن الحكم في القضية الكبرى شاملا لجميع أفراد الموضوع ، وبذا يكون التعميم في المقدمة الكبرى تعميما خاطئا لأننا لم ندخل في حسابنا هذا الطالب حين تكلمنا عن جميع أفراد هذه الفئة . وهكذا يتضح أن القياس الأرسطي لا يخرج عند كثير من المناطقة المعاصرين عن واحدة من حالتين : إما أن يكون تحصيليا للحاصل لا يفيد معرفة جديدة ، وإما أن يكون تناقضا .

٧ — من حيث أنه وسيلة مثلى أو نموذجية للبرهان: يرى أرسطو أن القياس —

وخاصة من الشكل الأول — هو الوسيلة المثلى للبرهان ، في حين أنه ليس برهانا بالمعنى الصحيح ، إذ يمكننا مثلا : —

(١) أن نبرهن على صدق نتيجة من مقدمتين كاذبتين ، مثل :

X كل من يعرف الإيطالية يعرف للنطق

X كل طلبة قسم الفلسفة يعرفون الإيطالية

.. كل طلبة قسم الفلسفة يعرفون للنطق

(ب) أو أن نبرهن على صدق نتيجة ، من مقدمتين إحداهما كاذبة ، مثل :

X كل حيوان يتغذى على الأعشاب

الحصان حيوان

.. الحصان يتغذى على الأعشاب

(ح) أو أن نبرهن على كذب نتيجة ، من مقدمتين إحداهما صادقة والأخرى كاذبة ، مثل :

X كل حيوان مشقوق الظلف

الإنسان حيوان

.. الإنسان مشقوق الظلف

ويرجع السبب في أننا نستطيع إستنتاج مثل هذه النتائج المختلفة ، إلى أن القياس عند أرسطو صوري في طابعه العام ، ولذا فليس أساس صدق نتيجة القياس عنده هو مدى مطابقتها أو عدم مطابقتها للواقع الخارجى ، بل مدى لزومها عن المقدمتين بالضرورة وفقاً لقواعد معينة . ولو كان الأمر مقصوراً على هذا الحد ، لكان الأعتراض الأساسى على القياس هو كونه تحميلاً للحاصل ، إلا أن أرسطو يعتبره في الوقت نفسه بمثابة الوسيلة المثلى لإبرهنة على صدق قضايا تتكلم عن أشياء في الواقع الخارجى ، ومن ثم أعتبره الوسيلة المثلى لتحصيل العلم ، وذلك حين ذهب إلى أن القياس — وخاصة من الشكل الأول — يكشف عن الأسباب — أى الحدود الوسطى — بحيث إذا عرفت الأسباب عرفت معها النتائج . وكأنا نقيس في هذه

الحالة نتيجة القياس بمعياريين ، معيار لزومها عن التلزمات ، ومعيار مطابقتها للواقع .
والمعياران مختلفان ، والخلط بينهما يؤدي إلى أن تكون النتيجة الواحدة أحيانا
في انقياس ، - نتيجة من حيث لزومها الصوري عن التلزمات ، وكاذبة من حيث
مطابقتها للواقع .

ثانيا : نقد الصورية في القياس :

يترتب على ما سبق ، القول بأن منطق أرسطو لم يكن منطقا صوريا خالصا ،
أو بعبارة أخرى أنه كان (مزيجاً من الصورية والمادية) (١) . الجانب الصوري
منه - ويتمثل في كتابه « التحليلات الأولى » - يتبدى في تسلسل التصورات
في الذهن وفقاً لقوانين معينة ، بصرف النظر عما تشير إليه في الواقع التجريبي .
والجانب المادي منه - ويتمثل في كتابه « التحليلات الثانية » - يتبدى في الاهتمام
بالاستدلال من حيث انطباقه على موضوعات العلم . وكانت هذه الثنائية في المنطق
القديم موضع النقد لدى دعاة المادية ودعاة الصورية معاً . فرأى أصحاب الاتجاه
الأول ، أنه لم تكن هناك أداة للعلم قديماً إلا المنطق القياسي بمعناه التقليدي الأمر
الذي أدى إلى تأخير التفكير العلمي بمعناه الحقيقي في أوروبا حتى حوالي القرن
السادس عشر . فلما بدأ التفكير العلمي الذي يعتمد على ملاحظة الواقع وعلى إجراء
التجارب ، بدأ الاتجاه إلى التخلص من تلك الأداة التي لا تتفق في صورتها مع
ضرورة التفكير في الواقع نفسه ، بما فيه من موضوعات وأشياء تقع في الخبرة
الحسية ، ومن ثم استبدلوا بالمنطق القديم ، المنطق الاستقرائي ، أو المنطق المادي
كما يسمى أحيانا . كما أن دعاة الصورية في المنطق الحديث والمعاصر ، رفضوا المنطق
التقليدي لما فيه من شوائب مادية ، إذ لم يكن في نظرهم على المستوى المجرد الصوري

(١) د. عبد الرحمن بدوي : المنطق الصوري والرياضي ، صفحة ٩ .

الكامل ، وأرادوه أداة صورية خالصة تستخدم الرموز بدلا من الألفاظ ، ومن ثم استبدلوا به ما يسمى بالمنطق الريمى . وهكذا أصبح المنطق التقليدى عند أغلب الناطقة المعاصرين غير صالح كأداة مثلى للتفكير السليم أو للاستدلال الصحيح . وقد عبر عن هذا المعنى كثير من الناطقة ، منهم على سبيل المثال لا الحصر :

(أ) رودلف كارب ، الذى ذهب إلى أن المنطق التقليدى (كان عاجزا عجزا تاما عن أن يستوفى الدور الجديد الذى ينبغى أن يلعبه فى الفكر ، من ثراء فى المضمون ، ودقة صورية ، وفائدة تلج عن طريقة إستخدامه . لأنه ظل معتمدا على النظام المدرسى الأرسطى الذى لم يحرز — حتى فى أقصى حالات تطوره إلا تقدما طفيفا فى حد ذاته) . (١)

(ب) برتراند رسل ، الذى ذهب إلى القول بأن (من أراد فى عصرنا الحاضر أن يدرس المنطق ، فوخته ضائع سدى لو قرأ لأرسطو أو لأحد تلاميذه) . (٢)

(ح) ابن تيمية ، الذى قال فى كتابه « الرد على المنطقيين » : (مازال نظام المسلمين يعينون طريقة أهل المنطق ، ويبينون ما فيها من العى والكنه ، وقصور العقل وعجز النطق . ويبينون أنها إلى إفساد المنطق العقلي واللسانى أقرب منها إلى تقويم ذلك . ولا يرضون أن يسلكوها فى نظرهم ومناظرتهم ، لا مع من يوالونه ، ولا مع من يعادونه) . (٣)

(د) الفرد تارسكى ، الذى ذهب فى التمهيد لكتابه « مقدمة للمنطق » إلى القول : (إننى أعتقد أن المساحة المحدودة التى خصصناها للمنطق التقليدى فى هذا الكتاب ،

(١) Carnap, R. : The Old and the New Logic

وهو مقال منشور فى كتاب « الوضعية المنطقية » لأير Ayer . صفحة ١٣٧ .

(٢) د. زكى نجيب محمود : المنطق الوضعى . (الجزء الأول) . تصدير .

(٣) ابن تيمية : الرد على المنطقيين . صفحة ١٩٤ .

تتفق والدور الصغير البسيط الذى يلعبه فى العلم الحديث . وإثنى أعتقد كذلك أن أغلب المناطقة المعاصرين يشاركوننى هذا الرأى . (١)

(هـ) دافيد هيلبرت ، الذى ذهب إلى أن الصياغة الأرسطية للمنطق ، أصبحت غير كافية حق بالنسبة للمواقف المنطقية البسيطة : فهى أساسا لا تكفى لتوضيح الأسس للمنطقية للرياضيات ، كما أنها تفشل بصفة خاصة ، حينما نرغب فى التعبير رمزيا عن العلاقة بين عدة موضوعات . (٢)

المنطق الرمزى الجديد :

روافده :

من العبارة السابقة التى تعبر عن وجهة نظر هيلبرت ، تبين أن هناك رافدين أساسيين يهذيان تيار المنطق الرمزى الجديد : رافد منطقى ، ورافد رياضى .

أولا: الرافد المنطقى:

ويتمثل فى الجهود الموافقة التى بذلها المناطقة : —

١ — إما لمحاولة تفسير بعض النظريات الخاصة بالمنطق التقليدى تفسيراً سوريا رمزياً ، على النحو الذى فعله يان لوكاشيفتش فى كتابه « نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصورى الحديث » (٣) وبذلك يصبح المنطق الرمزى الجديد استمراراً للمنطق القديم . وقد عبر مترجم الكتاب سالف الذكر عن هذا المعنى

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, Preface

Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical

Logic, P. 55. (٢)

(٣) لهذا الكتاب ترجمة عربية بقلم الدكتور عبد الحميد صبره ، ونشرته منشأة المعارف

بلاسكندرية عام ١٩٦١ .

بقوله (يخطيء من يظن أن نظرية القياس الأرسطية قد إنتهت بظهور المنطق الرياضي الحديث . والذين يعارضون بين منطق أرسطر والمنطق الرياضي إنما يسيئون فهم العلاقة بينهما . فالمنطق الرياضي ليس جنساً آخر من المنطق يبين للمنطق الأرسطي ، وإنما هو منطق صوري في ثوب جديد . وقد كان أرسطو أول من وضع أسس المنطق الصوري حيناً صاغ في القرن الرابع قبل الميلاد نظريته في القياس) . (١)

٢ — وإما لوضع منطق صوري جديد ، يتعاشى كل القائص سالفه الذكر في المنطق القديم ، ويكون أداة متمرده فعالة في عمليات الاستدلال الصحيحة . ويتمثل هذا الاتجاه عند أغلب الناطقة المعاصرين .

ثانياً : الرافد الرياضي :

ويتمثل في اتجاهين متكاملين : —

(أ) اتجاه يحاول أصحابه اصطناع منهج أشبه بالمنهج الرياضي في دقته ، بحيث يمكن تطبيقه لا على الرياضيات فقط ، بل كذلك بالنسبة لكافة موضوعات الفكر . ويتمثل هذا الاتجاه في محاولات أولية قام بها ديكارت وليبنز وغيرهما .

(ب) واتجاه يرى دعائه ضرورة تطوير المنطق الجديد على نحو يحل في استطاع العلماء حل كثير من المشكلات الرياضية ، وإلى تحليل أسس الرياضيات ومفاهيمها الأولية ، خاصة :

١ — بعد ظهور الهندسات اللا إقليدية وذلك بنشر الأبحاث التي قام بها عالم الرياضة الروسي نيقولاى لوبا شيفسكى Nicolai Lobachevsky فيما بين عامي ١٨٢٩ ، ١٨٤٠ ، التي تمثلت فيها أول محاولة لاقامة هندسة لا إقليدية ، ثم بنشر

(١) المرجع السابق ، مقدمة المترجم ، صفحة ٧ .

الدراسات التي قام بها العالم الرياضى الألماني برنارد ريمان Bernhard Riemann
الذى قدم فيها تحليلاً أكثر عمقا لصورة أخرى من صور الهندسة الاقليدية (١) :

٢ — وبعد ظهور جبر المنطق لعالم المنطق الأيرلندى جورج بول

Boole G. فيما بين عامى ١٨٤٧ ، ١٨٥٤ .

حقا إنه لم يكن هناك إرتباط مباشر بين هذين الخطين من خطوط الفكر
(الهندسات الاقليدية ، وجبر المنطق) ، إلا أن كلا منهما أثر تأثيراً كبيراً في
الفكر الرياضى ، على نحو أدى — مع نهاية القرن التاسع عشر — إلى تبين العلاقة
الوثيقة بينهما ، ومن ثم إلى ظهور نظرة جديدة لطبيعة المنطق ، وإلى الرابطة
القوية بينه وبين الرياضيات (٢) .

ولقد عبر موريس شليك عن هذا المعنى بقوله : (إن الرياضيين قد طوروا
الناهج المنطقية فى السنوات العشر الحالية [أى من حوالى ١٩٢٠ إلى ١٩٣٠] ،
وذلك لحل المشكلات التي لم يتمكنوا من التغلب عليها باستخدام الطرق التقليدية
للمنطق ، (٣) ويفسر كارناب هذا المعنى بقوله : (لقد ظهرت فى نهاية القرن
الماضى عدة تناقضات ومفارقات فى النسق الرياضى الجديد الخاص بنظرية المجموعات .
وسرعان ما كشف البحث الدقيق عن أن هذه التناقضات لم تكن ذات طبيعة
رياضية ، بل كانت ذات طبيعة منطقية عامة ، وهى ما نسميها « بالتناقضات
المنطقية » . فلم يكن للمنطق الجديد قد تطور بدرجة تجعله قادراً على التغلب على هذه
التناقضات أو حلها ... وكانت هذه القصة بمثابة الدافع لاعادة بناء النسق المنطقى

(١) Lee. H. : Symbolic Logic, P. 4.

(٢) المرجع السابق . الوضع نفسه

(٣) Schlick, M. The Turning Point in Philosophy. (in : Logical

Positivism. edited by : Ayer, A.J.) P. 54.

من أساسه، (١). أما عن الحاجة إلى تحليل أسس الرياضيات فقد عبر عنها هيلبرت بقوله : (إن هناك باعثاً قوياً أدى إلى تطور للمنطق الجديد . وكان ذلك الباعث ناتجاً عن حاجة الرياضيات إلى أساس دقيق تقوم عليه ، وإلى طريقة دقيقة منهجية للبحث فيها) (٢). ويفسر كازنب هذا المعنى بقوله : (إن العامل الهام الذي أدى إلى تطور المنطق الجديد ، كان يكمن في ظهور الحاجة إلى دراسة نقدية تعيد النظر في أسس الرياضيات . فالرياضيات وخاصة منذ عصر نيوتن وليبنيز تقدمت تقدماً كبيراً ، وحصلت قدراً كبيراً من المعرفة الجديدة . إلا أن أسس الرياضيات لم تتطور بالسرعة الكبيرة التي كان ينمو بها البناء الرياضي نفسه . ولذا فقد بدأت محاولة قوية لتوضيح المفاهيم الأساسية للرياضيات ، وكان هذا الجهد مشمراً في حالات عديدة . فقد نجح الرياضيون في إيجاد تعريفات دقيقة لبعض هذه المفاهيم ، مثل أفكارنا عن الحد ، وعن العدد ، تلك المفاهيم التي ظلت لفترة طويلة جداً ، تطبق في الرياضيات بنجاح ، دون أن يكون قد تم تعريفها تعريفاً دقيقاً ولقد بدأت محاولات توضيح هذه المفاهيم الأساسية في الرياضة تتقدم خطوة خطوة . ولم يقنع المفكرون برد المفاهيم الرياضية إلى المفهوم الأساسي لفكرة العدد ، بل طالبوا كذلك بتوضيح فكرة العدد نفسها توضيحاً منطقياً . ولقد تطلب هذا البحث في الأسس المنطقية للحساب ، ضرورة وجود نسق منطقي يتصف بصفة الشمول ، وبالذقة الكاملة . وهكذا أصبحت هذه الأبحاث بمثابة القوة الدافعة لتطور هذا المنطق الحديث . ولقد قام كل من يانو وفريجة وهوايتهد ورسل وهيلبرت ببحوثهم في المنطق من أجل تحقيق هذا الغرض أصلاً . كما أصبحت ضرورة إعادة بناء المنطق من جديد أكثر إلحاحاً ، حيناً لوحظ أن تناقضات معينة من التي تنشأ في الرياضيات ذات

(١) المرجع السابق . صفحة ١٣٩

(٢) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical

Logic. P. 1

طبيعة منطقية عامة . تلك التناقضات التي لم يمكن التغلب عليها إلا بواسطة إحداث
تغيير أساسي في المنطق (١) .

تعريف المنطق الرمزي :

يرجع أول استخدام للتعبير « المنطق الرمزي » Symbolic Logie إلى عالم
للنطق الإنجليزي جون فن John Venn عام ١٨٨٠ (٢) ، وإن كان جورج بول
يستخدم أحياناً تعبیر « البرهان أو الاستدلال الرمزي » . والواقع إن المنطق
الرمزي كثيراً ما يسمى بأكثر من إسم مثل : « المنطق الرياضي » Mathematical
Logie ، فيستخدم كثير من الناطقة المعاصرين الإسمين على أنهما مترادفان ، مثل
هيلبرت وأكرمان ، في كتابهما « مبادئ المنطق الرياضي » (٣) ، ومثل تشيرش
Alonzo Church في كتابه « مقدمة للمنطق الرياضي » (٤) ، ومثل بول G. Boole
الذي كان يستخدم للمصطلحات التالية : « التحليل الرياضي للمنطق » Mathematical
Analysis of Logic أو « النظرية الرياضية للمنطق » . ومثل شرويدر
E. Schröder الذي استخدم نفس المصطلح بالألمانية Mathematische Logik
عام ١٨٧٧ ، وبوريتسكي Platon Poretsky عالم المنطق الروسي عام ١٨٨٤ ،
وبيانو G. Peano عام ١٨٩١ . بل أن لينتز كذلك كان يستخدم تعبیر « المنطق

(١) Carnap. R. . The Old and the New Logic. (in . Logical
Positivism . ed. by . Ayer. A.J.) P. 135.

(٢) Church, A. . Introduction to Mathematical Logic. Vol. I. P. 51

(٣) Hilbert, D. & Ackermann- W. . Principles of Mathematical
Logic, P. 1

(٤) Church. A. . Introduction to Mathematical Logic. P. 56

«الرياضى» Logica Mathematica (١) جنباً إلى جنب مع اسم «الوجسطيقا» (٢).

هذا فضلاً عن تسميات متعددة أخرى مثل : « حساب المنطق » عند بلوكيه
G. Plancquet عام ١٧٦٦ ، وهى نفس التسمية التى نجدها أيضاً عند جورج بول
Calculus of Logic عام ١٨٧٤ . ومثل « اللوغاريتم للمنطق » Algorithm
Logique عن كاستيون G. F. Castillon عام ١٨٠٥ ، ومثل « حساب
الاستدلال » Calculus of Inference عند دى مورجن عام ١٨٤٧ ، ومثل
« المنطق الصورى » Theoretische Logik عند هيلبرت وأكرمان عام ١٩٢٨ ،
وعند رسل فى كتابه « أصول الرياضيات » (٣) ، ومثل « جبر المنطق » Algebra
of Logic عند بول ، وعند تشارلز بيرس عام ١٨٧٠ ، وغير ذلك (٤) .

وكما اختلفت الأسماء التى تطلق على هذا المنطق الجديد ، اختلفت التعريفات التى
تعرفه ، وسنورد فيما يلى أهم هذه التعريفات : -

١ — يرى بيانو أن (المنطق الرياضى ، هو الذى يدرس خصائص الإجراءات
والعلاقات الخاصة بالمنطق) ، وإن موضوعه هو صياغة أبسط نسق من المفاهيم

(١) المرجع السابق ، صفحة ٥٧

(٢) وقد تم قبول هذه الكلمة logistics أو Logistica من حيث هى مرادفة فى
معناها للمنطق الرمضى أو الرياضى فى المؤتمر الدولى للفلسفة الذى عقد فى جنيف عام ١٩٠٤
بناء على اقتراح إيتلسون Itelson وكوتيرا Conturat ولالاند A. Laland أنظر فى هذا
بالتفصيل :

Carruccio, E. . Mathematics and Logic in History and in
Contemporary Thought, P. 339.

(٣) برتراند رسل : أصول الرياضيات ، الترجمة العربية ، الجزء الأول ، صفحة ٤١

(٤) Church, A. . Introduction to Mathematical Logic. (٤)

(هامش صفحة ٥٧)

المنطقية صياغة تجعل منه شيئاً ضرورياً وكافياً لتمثيل الحقائق الرياضية وبراهينها
تمثيلاً رمزياً (١) .

٢ — ويعبر كل من هيلبرت وأكرمان عن المعنى نفسه ، بطريقة مختلفة إلى
حد ما ، بقولهما (إن المنطق الرياضي — ويسمى كذلك المنطق الرمزي — إمتداد
للمناهج الصورية الخاصة بالرياضيات ، إلى مجال المنطق) . (٢)

٣ — وهناك تعريف آخر ، أوسع في مضمونه من التعريفين السابقين ، يذهب
إليه إيتورى كاروتشيو في قوله بأن المنطق الرياضي هو (مجموعة المبادئ الخاصة
بالبنية العقلية المتعلقة بالنظريات الرياضية) (٣) .

٤ — إلا أن تعديش يرى في المنطق الرياضي معنى أكثر إتساعاً من ذلك ،
فيذهب إلى أنه (يفضل استخدام تعبير « المنطق الرياضي » ، على أن يفهم منه معنى
المنطق إذا تم تناوله باستخدام المنهج الرياضي أو المنهج الرمزي بصفة خاصة) (٤) .

٥ — وبما أن موضوع المنطق الصوري هو الاستدلال بصفة عامة ، فإننا ننتهي
مع رسل إلى القول بأن (المنطق الرمزي أو الصوري — وهما إصطلاحان سأستعملهما
مترادفين — هو دراسة مختلف الأنواع العامة للاستنباط) (٥) . وبما أن رسل لا يميز
بين الاستدلال والاستنباط (٦) ، فإنه ينتهي إلى أن (المنطق الرمزي يختص أساساً

(١) Carruccio, E. . Mathematics and Logic in History and
Contemporary Thought. P. 839.

(٢) Hilbert. D. & Ackermann. W. . Principles of Mathematical
Logic. P. 1.

(٣) Carruccio. E. . Mathematics and Logic in History and
Contemporary Thought. P. 839

(٤) Church. A. . Introduction to Mathematical Logic. (٥٦
هامش صفحة ٥٦)

(٥) رسل : أصول الرياضيات — الترجمة العربية — الجزء الأول — صفحة ٤١

(٦) المرجع السابق ، انظر هامش صفحة ٤٢

بالاستدلال بوجه عام (١) ، ولذا فإن ما يبحث فيه هو (القواعد العامة التي يجري الاستدلال عليها) (٢) ، على أن نضيف إلى هذا التعريف العام ، الشرط الذي اشترطه تشيرش، وهو استخدام المنهج الرياضي بصفة عامة ، والمنهج الرمزي بوجه خاص .

للمنهج الرمزي الرياضي :

ويعنى في الرياضيات وفي المنطق الحديث ، للمنهج الذي يتبع في صياغة الأنساق، والحسابات التحليلية ، صياغة صورية . وفيما يلي الخطوات التي ينبغي إتباعها لإقامة نسق منطقي رمزي :

- ١ — إعداد قائمة بالرموز الأولية المستخدمة في النسق .
- ٢ — تحديد نوع التوالى — أو العلاقة — بين هذه الرموز الأولية — أو طريقة تتبعها وترابطها على نحو يؤدي إلى تكوين صيغ النسق بطريقة صحيحة .
- ٣ — تحديد الصيغ التي يمكن اعتبارها كبداهيات ، من بين تلك الصيغ التي تم تكوينها بطريقة صحيحة .
- ٤ — تحديد قواعد الاستدلال التي يمكن بواسطتها أن نستدل على صيغ تم تكوينها بطريقة صحيحة ، من مجموعة الصيغ التي اعتبرناها كمقدمات .

أهمية الرموز في المنطق الجديد :

يعبر رودلف كارنب عن فائدة المنهج الرمزي في المنطق الحديث في مقال له بعنوان « المنطق القديم والمنطق الحديث » بقوله : (إن من يقرأ مقالا في المنطق الحديث ، تسترعى إنتباهه سمة بارزة فيه ، هي استخدام الصيغ الرمزية التي تبدو شبيهة بتلك الصيغ الرياضية . ولقد وضعت أصلا محاكاة للرياضيات ، ثم تطورت تبعاً لذلك الصيغ التي تتناسب وتحقيق الأهداف الخاصة بالمنطق أكثر من غيرها .

(١) المرجع السابق ، صفحته ٤١

— (٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

ومن الواضح جدا في الرياضيات أن فائدة المنهج الرمزي — من الناحية التمثيلية —
تفضل فائدة المنهج الذي يستخدم اللغة العادية . ولنأخذ مثلا لذلك العبارة التالية :
« إذا ضرب أى عدد في عدد آخر ، تكون نتيجة ذلك هي نفس نتيجة ضرب
العدد الثاني في العدد الأول » ، فنجد أن المعنى يكون أكثر وضوحا ، لو قلنا : « بالنسبة
لأى عددين س ، ص ، تكون : $s \times v = v \times s$ » أو قلنا بشكل
أكثر اختصارا ، مستخدمين في ذلك علامة التعميم المنطقية : (س ، ص) .
 $s \times v = v \times s$ (١) . ويمكن تلخيص أهمية الرموز في المنطق
فيما يلي : —

١ — الدقة في التعبير : حتي تتلافى ما في اللغة من غموض ، وما يترتب على
ذلك من مشكلات تتعلق بالاستدلال . وفي هذا الصدد تقول استبنج S. Stebbing
في كتابها « مقدمة حديثة للمنطق » : (إن استخدام اللغة العادية أحيانا ما يؤدي
إلى الوقوع في الخطأ ، أما إذا استخدمنا رموزا معينة ، فأننا نتعاشى الخلط أو اللبس
الذي قد ينشأ عن استخدام الألفاظ ففعل الكينونة مثلا يمكن أن يعبر عن
أكثر من معنى مختلف مثل : الوجود ، والحمل أو الأخبار Predication ، والهوية ،
والتساوي ، وهذا ما يتضح من العبارات التالية — على الترتيب — : « الله موجود »
god is ، « سقراط يكون حكيما » Socrates is wise ، « إني هـ — و »
it is me ، « إثنان وإثنان تساوي أربعة » two and two are four ،
الأمر الذي قد يؤدي أحيانا إلى الغموض واللبس نتيجة للخلط بين هذه
المعاني (٢) .

(١) Carnap, R. : The Old and the New Logic , (in : “ Logical

Positivism ” , ed. by : Ayer, A.J.) , P. 136.

(٢) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, P. 116

٢ — الأقتصاد في الجهد والفكر فضلاً عن البساطة ، وذلك ما يتجلى في إمكان التعبير عن المعاني المركبة بشكل أبسط وأكثر إيجازاً . فالتعابير القائمة على علاقات تبادلية مثل $S + S = S + S$ ، هي أوضح وأبسط وأدق في المعنى مما لو عبرنا عنها باللغة . وفي هذا العدد تقول استبنج في كتابها سالف الذكر أن التعبير الرمزي يسهل عملية الفهم ويوضحه بشكل أكثر بساطة ، (وهذا ما يتضح من التعبيرين التاليين : —

أولاً : « $S + S = S + S$ » .

ثانياً : إذا أضيف عدد تال لأي عدد معين ، إلى هذا العدد ، كانت النتيجة هي نفس نتيجة إضافة العدد المعين إلى العدد التالي .

فالتعبيران متساويان في المعنى ، وأن كان أولهما أكثر بساطة ووضوحاً . . . وهذا ما يسمى بالبساطة المنطقية (١) .

٣ — إمكان البحث عن العلاقات بين الإلفاظ أكثر من الالتصاق بالألفاظ نفسها ومعانيها ، أي إمكان التعبير بدقة عن صورة القضية لا مادتها .

٤ — إمكان التعبير الصوري عن عملية الاستدلال من الرموز بغض النظر عن معانيها

شروط استخدام الرموز :

١ — أن تكون الرموز موجزة بقدر الإمكان حتى تحقق معنى الاختصار أو الإيجاز ، وهو هدف أساسي من استخدام الرموز .

٢ — أن تكون مبسطة بقدر الإمكان حتى يمكن إدراكها بسهولة لأول وهلة .

٣ — أن تكون مما يجعل عملية الاستدلال ، سهلة ميسورة بأقل جهد في التفكير .

٤ — أن تكون مجردة لاتعبر عن تصورات بعينها ، حتى يتسنى صياغتها في

قوالب وإطارات صورية خالصة .

وهكذا يمكننا أن نتبين ثلاث خصائص على الأقل يجب توافرها في الجهماز
الرمزى المنطقي ، هي :

١ — الاقتضاب أو الإيجاز Conciseness

٢ — والدقة Precision

٣ — والاتساق والتنسيق Systematization^(١)

المنطق القديم والمنطق الجديد :

يخلط بعض المناطقة بين المنطق التقليدي ، وبين المنطق الرمزى المعاصر ، فهما
لا يكادان يفترقان في نظرم إلا بقدر ما يعتبر الأخير تطوراً جديداً ، للمنطق
التقليدي على نحو جملة أكثر ثراءً وغنى ، فكلاهما منطق صوري لا يهتم بالواقع
الخارجي بقدر إهتمامه بالقوالب أو الإطارات المتعلقة بصورة الفكر . إلا أن التشابه
بين المنطق القديم والمنطق الرمزى المعاصر ، وإن برر جمعهما في إطار واحد هو
الإطار الصوري ، إلا أنه لا يرر إعتبارهما شيئاً واحداً ، بل إنهما مختلفان اختلافاً
واضحاً يرر فصلهما داخل ذلك الإطار الصوري العام ، ويمكن توضيح ذلك من
للمقارنة التالية : —

١ — المنطق الرمزى للمعاصر منطق صوري صورية كاملة ، أو هو على الأقل
أكثر تجريداً وصورية من المنطق القديم الذي كان يجمع بين الصورية والمادية ،
وإن كان يخلب عليه الطابع الصوري . وتبدى هذه الصورية الكاملة في المنطق
الرمزى المعاصر ، في أنه لا يبحث في العلاقات الواقعية بين الأشياء ، إنما يبحث في
العلاقات المنطقية التي يمكن أن تقوم بين القضايا ، ولذا فهو محتوي على تعميمات ذات

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٢١ .

مستوى لم نكن لنبلغه بإتباع المنطق التقليدى . كما أنه لا يهتم بالمطابقة بين القضايا وبين الواقع الخارجى . بل يميل أصحابه إلى أن تكون قضايا والعلاقات بينها مما يختلف عن الواقع الخارجى^(١) .

٢ — إن وسيلة التعبير فى المنطق الصورى التقليدى — وهى ألفاظ اللغة — أقل دقة وأدعى إلى الوقوع فى الخطأ ، منها فى المنطق الحديث الذى يستخدم بدلا من الألفاظ الرموز المختلفة .

٣ — إن منهج الاستدلال فى المنطق التقليدى أقل دقة منه فى المنطق الحديث ، لأنه كان مقصوراً على نوع واحد من الاستدلال هو الاستدلال القياسى .

٤ — إن المنطق التقليدى كاد أن يقتصر فى تناوله للعلاقات على علاقة التضمن وحدها ، الأمر الذى جعل قضاياها قضايا حملية تكون كل منها — من موضوع ومحمول مرتبطين بعلاقة التضمن أو الاشتمال . أما المنطق الحديث فقد كشف عن مجموعة كبيرة من العلاقات وحلها ووضع لها رموزاً محددة ، وحساباً تحليلياً دقيقاً .

٥ — المنطق التقليدى لم يكن يفرق بين القضية وبين دالة القضية ، أما المنطق الحديث فيفرق بينهما ، ويجعل أغلب اهتمامه منصرفاً إلى دالات القضايا طالما أنه يستخدم رموزاً ومتغيرات .

٦ — المنطق الحديث أكثر خصوبة فى نتائج الاستدلال ، وذلك لاستخدامه كم المحمول وحسابه ، مما يوسع من قاعدة الاستدلال ، وكذا تحليل العلاقات ، مما يوسع من مجال الاستدلال ونطاقه .

(١) وقد أورد الفرد تارسكى أمثلة متعددة فى هذا الصدد ، لارجع إلى :

Tarski, A. : Introduction to Logic, P.

تطور المنطق المعاصر :

أولاً : عادة ما ترد بداية هذا المنطق إلى كتابات لينتز Leibniz (+١٧١٦) وترجع أهمية لينتز في هذا الصدد إلى :-

(١) أنه فكر في إصطناع منهج عام يمكن إتباعه أثناء البحث في كل العلوم ، وذلك بإتخاذ المنهج الرياضى نموذجاً يحتذى به في جميع العلوم .

(ب) أنه فكر في استخدام لغة علمية يتخذها العلماء والمفكرون وسيلة للتفاهم بينهم ، أسماها باللغة العالية التى تستخدم الرموز بدلاً من ألفاظ اللغة العادية ، أو باللغة الفلسفية *Lingua philosophica* ذات الخصائص العامة (١) .

(ج) إنه رد كل المعارف أو الحقائق الضرورية إلى مبدأ واحد هو مبدأ الهوية ، وصاغه صياغة رمزية عرفت فيما بعد بإسم قانون لينتز .

(د) إنه توصل إلى صياغة مبدأ مشترك بين جميع أنواع الاستدلالات ، هو مبدأ « إستبدال التكافئات » *Substitution of Equivalents* ، ذلك المبدأ الذى أوضحه جيفرترز فيما بعد بإسم « إستبدال التشابهات » (٢) .

ثانياً : ظهرت في القرن الثامن عشر عدة محاولات في مجال المنطق الرمضى ، إلا أنها لم تكن ذات أثر واضح في تطويره ، مثل تلك الجهود التى بذلها لمبرت Heinrich Lambert (+١٧٧٧) وبلوكية Plaucquet وكاستيون Castillon والعالم الرياضى السويسرى ليونارد أويلر Leonard Euler الذى توصل إلى الكشف عن الطريقة المعروفة بإسمه في أغلب كتب المنطق التقليدى ، لتوضيح

(١) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, P. 327.

(٢) أو مبدأ « مناب الأشباه » . انظر « المنطق الصورى والرياضى » للدكتور .

البراهين القياسية وتصويرها باستخدام النواتج للتعبير عن الحدود أو الفئات (١) ،
والتي كان لها تأثير كبير في استخدام الأشكال عند فن بعد ذلك .

ثالثاً : قدم وليم هاملتون W. Hamilton (+ ١٨٥٦) في النصف الأول
من القرن التاسع عشر نظريته — التي سبق ذكرها — في كم المحمول . كما قدم
أوجستس دي مورجن A. De Morgan نظريته في منطقة الرياضيات ، وكذا
نظريته في تحليل العلاقات ، فضلاً عن قوانينه المعروفة في المنطق المعاصر ، الخاصة
بالتعبير عن إجراء الجمع المنطقي بواسطة إجراء الضرب المنطقي ، وبالعكس .

ولقد بدأ المنطق الرمزي إستقلاله كفرع خاص من فروع العلم ، منذ حوالي
منتصف القرن التاسع عشر ، وكان ذلك راجعاً إلى الدراسات التي قدمها جورج بول
G. Boole (١٨١٥ — ١٨٦٤) مؤسس جبر المنطق . وكما أن بداية المنطق
الرمزي ترد عادة إلى المحاولات التي بذلها لينتز في هذا الصدد ، فإننا نستطيع القول
بأن جورج بول هو المؤسس الحقيقي للمنطق الرمزي ، ومن بين أهم الدراسات التي
توضح أهمية بول في تاريخ المنطق المعاصر ، المقال الذي نشره عام ١٨٤٤ بعنوان
« منهج عام في التحليل » A General Method of Analysis الذي أسهم به
في تعميم التفكير البرهاني الجبري (٢) ، وكذا كتابه « التحليل الرياضي للمنطق »
Mathematical Analysis of Logic الذي نشره عام ١٨٧٤ ، وكتاب
« أبحاث في قوانين الفكر » Investigations of the Laws of Thought
عام ١٨٥٤ ، فضلاً عن مجموعة الدراسات التي قام بها في مجال حساب الاحتمالات (٣).

(١) Lee, H. : Symbolic Logic, P.8

(٢) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, P. 404.

(٣) وقد نشرت مجموعة من هذه الدراسات ، مع كتاب « التحليل الرياضي للمنطق »
في كتاب واحد هو :

Boole, G. : Studies in Logic and Probability. (London, 1952)

وتعتبر أهم الكشف التي توصل إليها بول في ميدان المنطق الرمزي ، هي إمكان وجود جبر خاص بالموضوعات التي ليست أعداداً (١) (مثل الفئات ، فالفئات يرمز لها برموز، كما أن العلاقات بين الفئات يمكن التعبير عنها بواسطة إجراءات شبيهة بالجمع والضرب) (٢) . ولقد ترتب على طريقة تناول بول للمنطق جبرياً أن أصبحت لدى للناطقية بعد ذلك أداة فعالة وناجحة في تحليل منطق الرياضيات ، فضلاً عن المنطق نفسه بصفة عامة .

ولقد تم تطوير جبر بول بواسطة غيره من المنطقية والرياضيين ، مثل جيفونز Jevons, w. الذي اقترح في كتابه « المنطق الخالص » عام ١٨٦٤ إجراء تعديل بالنسبة للجمع المنطقي عند بول .

كما توصل جون فن John Venn عالم المنطق الإنجليزي إلى طريقة لتوضيح إجراءات الجبر ، وتصويرها بواسطة عدة أشكال ورسومات diagrams ، وذلك في كتابه « المنطق الرمزي » (٣) معدلاً بذلك من طريقة استخدام الدوائر عند أويلر ، مستخدماً في ذلك فكرين أساسيين في جبر بول ، هما فكرة الفئة الفارغة (أو الفئة الصفرية التي ليس لها ماصدقات) ، وفكرة الفئة الكلية أو الشاملة (٤) .

والواقع إن أهم الجهود التي بذلت لتطوير جبر بول ، وأهم الإضافات التي تمت إليه ،

(١) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic, P. 405.

(٢) Lee, H. : Symbolic Logic, P. 7.

(٣) Venn, J. : Symbolic Logic (London, 1881)

(٤) Lee, H. : Symbolic Logic. P. 8

وسوف نستخدم في كتابنا الحالي ، طريقة الشكل عند فن ، أثناء التعبير عن منطق الفئات ، والعلاقات القائمة بينها .

هي تلك التي نجدها عند عالم المنطق الأمريكي تشارلز بيرس^(١)، وعالم الرياضيات الألماني إرنست شرويدر E. Schröder، وخاصة فيما يتصل بالعلاقات وتحليلها.

رابعا : مع نهاية القرن التاسع عشر، ظهر اتجاه آخر نتيجة لحاجة الرياضيات إلى تدعيم الأساس الذي تقوم عليه مفاهيمها وطرق البرهان فيها. ونرجع مصادر هذا الاتجاه إلى كتابات جوتلوب فريجة G. Frege (١٨٤٨ — ١٩٢٥) الذي نشر عام ١٨٧٩ كتاباً بعنوان « تدوين الأفكار » Begriffsschrift، ثم نشر بعده بخمس سنوات، أي عام ١٨٨٤، كتاباً آخر هو « أسس علم الحساب » Die Grundlagen der Arithmetik^(٢). ويعتبر أهم كتب فريجة المتعلقة بالمنطق الرياضي (أو الرمزي) وفلسفة الرياضيات، هو كتابه « المبادئ الأساسية لعلم الحساب » Grundgesetze der Arithmetik — الذي نشره في قسمين، الأول منهما عام ١٨٩٣ والثاني عام ١٩٠٣ — وقام فيه فريجة بتحليل المفاهيم والتصورات والعمليات الحسابية بشكل مفصل. إلا أن الجهاز الرمزي الذي استخدمه كان على درجة كبيرة من الصعوبة. ولقد ظلت أهمية كتابات فريجة مجهولة حتى كشف عنها وبسطها ووسعها عالم المنطق المعاصر برتراند رسل.

وترجع أهمية فريجة في تاريخ المنطق الرمزي — بالإضافة إلى أهميته البالغة في فلسفة الرياضيات ومنطقها، أي ردها إلى المنطق — إلى :

(١) أنظر مقال « المنطق الصحيح » عن تشارلز بيرس — لمؤلف هذا الكتاب — في مجلة تراث الإنسانية، المجلد السابع، العدد ٢.

(٢) وقد ترجم أوستن J. L. Austin هذا الكتاب الأخير لفريجة إلى اللغة الإنجليزية عام ١٩٥٠. كما ظهرت ترجمة إنجليزية لنهل الأول من كتابه « تدوين الأفكار »، وكذا مقتطفات من كتابه « المبادئ الأساسية لعلم الحساب » وذلك في كتاب : « ترجمات من أعمال جوتلوب فريجة الفلسفية » :

Geach & Black. M. : Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege. (New York, 1952) .

١ — تحديد معنى قيمة الصدق في القضية تبعاً لاختلاف نوع القضية ، تركيبية كانت أو تحليلية .

٢ — وإلى تفرقه بين القضية وبين دالة القضية ، تلك التفرقة التي توصل إليها فريجة نتيجة للمقارنة بين المحمول في القضية ، وبين التعبير الخاص بالدالة الرياضية .

٣ — وإلى إدخاله وتقديعه بعض الرموز الجديدة في الحساب التعديلي ، مثل الرمز " ١ " الذي يعبر عن الحكم أو الإثبات ، والذي يكتب قبل العلامة أو مجموعة العلامات الخاصة بالقضية^(١) .

ولقد تطور هذا الاتجاه الذي بدأه فريجة على يد كل من يانو G. Peano في كتابه « الصيغ الرياضية » Formulaires de Mathematiques الذي حلل فيه الرياضيات بغرض ردها إلى للنطق ، والفرد نورث هوايتهد A. N. Whitehead في كتابه « رسالة في الجبر العام » ، سنة ١٨٩٨ الذي أوضح فيه الفرق بين أنماط للنطق (بما في ذلك جبر بول كأحد هذه الأنماط) ، وكذا برتراند رسل في أكثر من كتاب له مثل « أصول الرياضيات » ، و « المبادئ الرياضية » (الذي اشترك فيه مع هوايتهد) ، و « مقدمة لفلسفة الرياضيات » ، ومثل هيلبر في كتابه « أسس للنطق الرياضي » ، وفينغنشتين L. Wittgenstein في كتابه « رسالة منطقية فلسفية » .

خامساً : هكذا بدأ منذ نهاية القرن التاسع عشر ، وبداية القرن العشرين ، الاتجاه إلى توسيع مفهوم النطق ، وكذا ازدياد الاتجاه إلى صياغة الرياضيات صياغة صورية مما ترتب عليه إظهار أن مجالي النطق والرياضيات كانا يزدادان قرباً واقتراباً . فالاستدلال الرياضي ليس استدلالاً لفظياً ، بل هو استدلال رمزي

(١) Kneale, W. & Kneale, M. : The Development of Logic. P. 478

كما أنه لا يأخذ صورة التعبير ذى للوضع والمحمول ، إنما كان في حقيقته استدلالاً منطقياً . كما أن توسيع مفهوم المنطق ، أظهر هو الآخر عدم ضرورة اتخاذ المنطق صورة المنطق الحلى ، بل إمكان تعديله وإقامته على طريقة رياضية . الأمر الذى ترتب عليه قيام كل من رسل وهواينهد عام ١٩٠٠ بمحاولة استنتاج الرياضيات من مبادئ المنطق الخالص . ولكي يتمكنوا من إتمام ذلك ، كان عليهما أن يقيما منطقهما أولاً ، إذ لم يكن قد تم حتى ذلك الوقت تقرير مبادئ وأسس المنطق الذى تم تطويره على أنه نسق استدلالى قائم على مجموعة من البديهيات . وهذا ما ظهر فى العمل المشترك الذى قاما به معاً ، وهو كتاب « المبادئ الرياضية » ، مستفيدان فى ذلك من جهود كل من شرودير وفريجة ، فضلاً عن جهود بيانو فى تحليل الرياضيات .

سادساً : والواقع إن تطور المنطق المعاصر لا يرجع فقط إلى جهود وأبحاث المناطق الذين سبقت الإشارة إليهم . إذ لا يمكن إغفال جهود كثير من المناطق المعاصرين مثل كوتيرا Couturat (١٨٦٨ — ١٩١٤) الفرنسى ، ورودلف كارناب R. Carnap ، وايتورى كاروتشيو E. Carruccio الإيطالى ، والوزو تشيرش A. Church الأمريكى ، وكذا كل من سوزان لانجر S. Langer وسوزان استبنج S. Stebbing ، فضلاً عن منطقة مدرسة وارسو البولندية مثل يان لوكاشيفتش J. Lukasiewicz (١٨٧٨ — ١٩٥٦) والفرد تارسكى A. Tarski ، وكوتار بنسكى T. Kotarbinski وغيرهم ، الأمر الذى أدى إلى تطوير المنطق الرمضى المعاصر على الصورة البالغة الدقة التى يتبدى عليها الآن بعد منتصف القرن العشرين .

الفصل الثاني

الحساب التحليلي للفئات

The Calculus of Classes

الحساب التحليلي للفئات أحد موضوعات الحساب المنطقي Logical Calculus، الذي يتكون منه ومن الحساب التحليلي للعلاقات، وللقضايا ولدالات القضايا . وهو وأن كان أسبق من غيره من أنواع الحساب التحليلي في المنطق المعاصر — تاريخيا — في التطور إلا أن أغلب الكتب التي تعرض للمنطق الرمزي ، تجعل من الحساب التحليلي للقضايا بداية لعرضها النسخي لموضوعات المنطق . على أساس أن ما نقوله عن فئة ما ، أو عن علاقة بين فئتين أو أكثر ، إن هو — إلا إثبات لقضية ما (١) . ونحن لن نلتزم في عرض تمهيدى للمنطق المعاصر — كهذه الدراسة التي بين أيدينا — بالطريقة المتبعة في أغلب الكتب الأجنبية ، بل سنبدأ من الحساب التحليلي للفئات ، أي من مكونات القضية لا من القضية ، منتهجين في هذا منهجا تركيبيا يبدأ من الفئات ، والعلاقات بينها ، ثم القضايا وعلاقاتها ، منتهين من هذا إلى دالات القضايا وحسابها وكذا إلى العلاقات ، مع محاولة تطبيق قواعد الاستدلال بالنسبة لأغلب الموضوعات التي نعرض لها .

ومما هو جدير بالذكر أن موضوعات الحساب التحليلي الثلاثة الأساسية (لفئات والعلاقات والقضايا) مترابطة على نحو يصعب علينا فيه أن نعرض لواحد منها فقط دون أن نتناول الموضوعين الآخرين أو نعرض لهما . إلا أننا — بغرض تسهيل الدراسة — سنتناول كل موضوع منها على حدة ، بادئين بالحساب التحليلي لفئات ، وذلك كما يلي :

يقوم حساب الفئات أساساً على إقتراض إتياء الأعياء إلى فئات أو دخولها في مجموعات ، بناء على إتصافها بصفة أو صفات معينة . ومن ثم يمكننا أن نتصور العالم ، على أنه مكون من جميع الفئات التي يمكننا تخيلها . أو بمعنى آخر فإن مجموع هذه الفئات تكون هي كل ما يتألف منه العالم . ولرمز للفئات بالحروف الهجائية الآتية : ا ، ب ، ج ، فإذا كنا نتكلم عن الفئة ا من بين الفئات التي يتألف منها العالم ، فإن ما يتبقى في العالم بعد أن نستبعد منه هذه الفئة — يكون هو كل ما لا ينتمي إلى الفئة ا ، أو لا يكون عضواً من بين أعضائها ، أي ما ليس ا ، أو : لا — ا ^(١) وسنرمز له بالرمز \bar{a} . وهكذا يتكون العالم كله من أعضاء هي إما منتبعية إلى الفئة ا أو إلى الفئة \bar{a} . ولنوضح ذلك بالمثال التالي : —

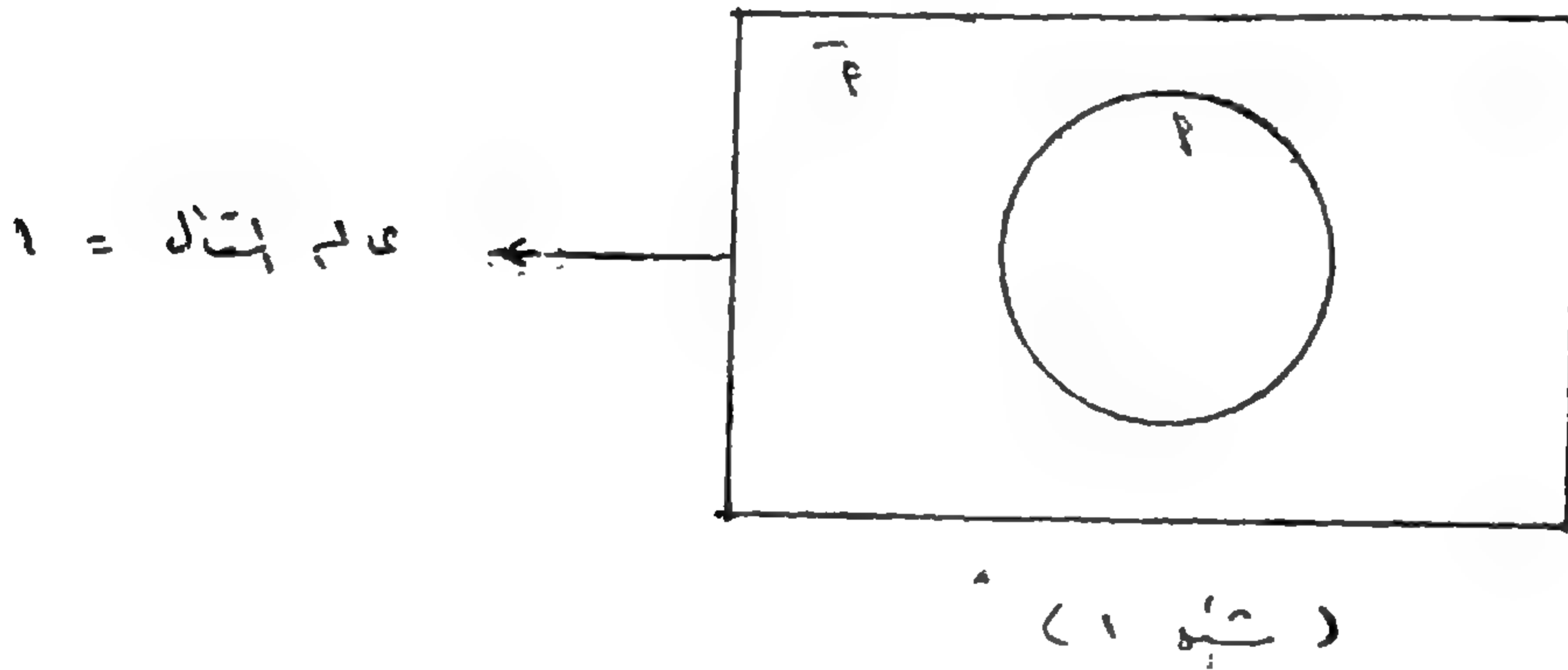
لو كانت ا ترمز لفئة الأشياء الملونة باللون الأحمر ، كانت الفئة \bar{a} شاملة لكل الأشياء غير الملونة باللون الأحمر مثل الأشياء الخضراء والصفراء وغير ذلك . وعلى ذلك فالعالم يتكون في هذه الحالة من فئتين كبيرتين هما ا ، \bar{a} . إلا أن العالم في حقيقته لا يتكون من هاتين الفئتين بعينهما ، بقدر ما يتكون من أي فئتين بحيث تكون إحداهما تقياً أو سلباً للآخرى . فلو كنا نتكلم عن الفئة ب ، ولتكن هي فئة الأشياء الخضراء ، كانت الفئة \bar{b} هي الفئة المكونة من الأشياء غير الخضراء اللون . ومن ثم فإن العالم يتكون في هذه الحالة من الفئتين ب ، \bar{b} . وبالمثل يمكننا أن ننتهي إلى أن العالم يتكون كذلك من : ج ، \bar{c} أو د ، \bar{d} ... أو من أية فئة ونقيضها .

يلاحظ في المثال السابق أن محور تصنيف الفئات في العالم هو اللون ، وبمعنى

(١) Boole. G. : The Mathematical Analysis of Logic. (ed in . Studies in Logic and Probability). P. 64.

آخر فإن العالم الذى تتكلم عنه هو عالم الأشياء للوننة ، أو هو علم للقياس
 Universe of Discourse الخاص بالألوان . وسواء كنا نتكلم عن العالم بصفة
 عامة — كما هو الحال عند جورج بول — أو عن علم مقال معين ، كما هو الحال
 عند دي مورجن^(١) A. De Morgan فإننا نرمز له بالرمز ١ ؛ أى الواحد —
 الصحيح . ومن ثم فإن : $1 + \bar{1} = 1$ أو $1 + \bar{1} = 1$ أو $1 + \bar{1} = 1$
 الخ .

وعادة ما تسمى الفئة النفية التى يكون حاصل جمعها ، هي والفئة الأصلية ،
 مساوياً للواحد الصحيح ، مثل \bar{A} بالفئة المنقوضة أو الفئة المكملية
 Complementary Class للفئة الأصلية^(٢) . ويمكن توضيح العلاقة بين فئة ما
 وبين الفئة المكملية لها بالرسم التالى :



الذى يوضح :-

١ — أن الفئة \bar{A} هي الفئة المكملية لفئة A ، من حيث أنها تحتوى على أى شيء
 فى عالم المقال لا يكون هو A .

(١) Kneale. W. & Kneale. M. : The Development of Logic. P. 408.

(٢) Schipper. E. W. & Schuh. E. : A First Course in Modern Logic. P. 257 .

كما يوضح أن الفئة A ، تعتبر أيضاً فئة مكملة لفئة \bar{A} (على أساس أن A هي الفئة التي تنفي \bar{A} لأنها تساوي « لا A » ونفي النفي إثبات) من حيث أنها تشتمل على كل ما لا يندرج تحت الفئة \bar{A} ، ويسمى الرسم الذي يكون ممثلاً للرسم السابق ، أو الذي يقوم على أساسه بإسم « شكل فن Venn's Diagram ^(١) » .

الفئة المكملة للفئة الشاملة :

بما أننا نفترض لكل فئة ، وجود فئة مكملة لها بالنسبة لعالم مقال معين ، فإن الفئة الشاملة Universe Class (أى عالم المقال) — بحكم ما هي فئة — ليست مستثناة من هذه القاعدة . وعادة ما تسمى الفئة المكملة للفئة الشاملة ، بالفئة الصفرية أو الفئة الفارغة The Null Class ، ويرمز لها بالرمز « صفر » . والواقع أن تصور الفئة الفارغة ، تصوير يصعب تفسيره بدقة ، لكن من الممكن وصف هذه الفئة أو التعبير عنها بأنها « فئة جميع الفئات التي لا أعضاء لها » ^(٢) . وهكذا يمكننا تعريف الفئة الفارغة بالصيغة التالية : $\bar{A} = \text{صفر}$

التي تعني أن الفئة الفارغة تتطابق ذاتياً مع الفئة المكملة للفئة الشاملة ، أو تكون في حالة هوية معها . وبما أن الفئة الشاملة تحتوى على جميع الفئات ذات الأعضاء ، فإن الفئة الفارغة إذن تكون في حالة هوية مع « لا شيء » أو « الصفر » .

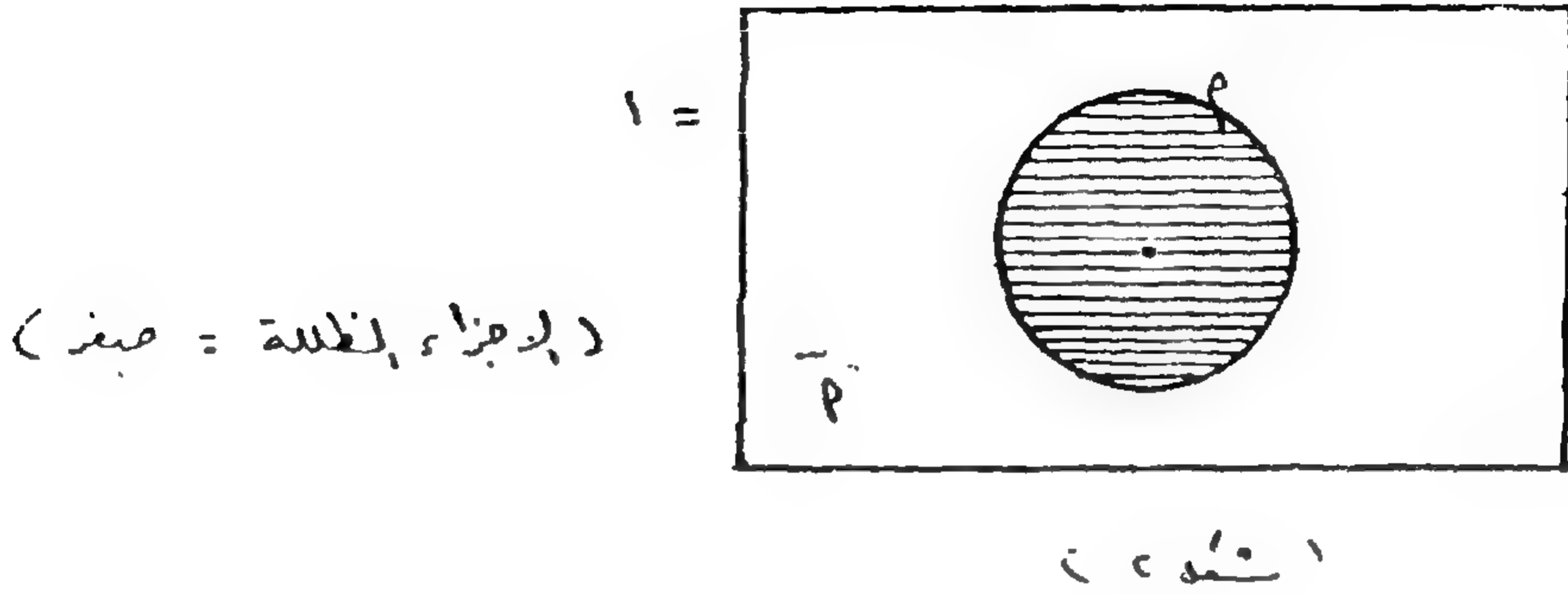
هذا ويمكننا التعبير عن كون فئة ما ، مثل A ، بأنها فئة فارغة أو مساوية

للصفر بالقول : $A = \text{صفر}$

(١) نسبة إلى جون فن John Venn عالم المنطق الانجليزي الذي ألف في المنطق الحديث كتاباً قياً بعنوان « المنطق الرمزي » Symbolic Logic [لندن عام ١٨٨١] .

(٢) Schipper. E. & Schuh. E. A First course in Modern Logic. (٢)

وهذا ما نعبر عنه بالرسم كما يلي :



والواقع أن الحساب التحليلي للفئات إنما يقوم أصلا على معرفة العلاقة بين الفئات حين تتخذ حيالها عدة إجراءات Operations — هي أشبه ما تكون بالعمليات التي يجريها الرياضيون في الحساب والجبر مثل : الضرب أو الجمع أو الطرح — بغرض التوصل إلى معرفة القوانين التي تحكم : استنتاج النتائج التي تلزم عن اتخاذ تلك الإجراءات .

ويمكن تصنيف أهم الإجراءات التي تتبع إزاء الفئات إلى نوعين :

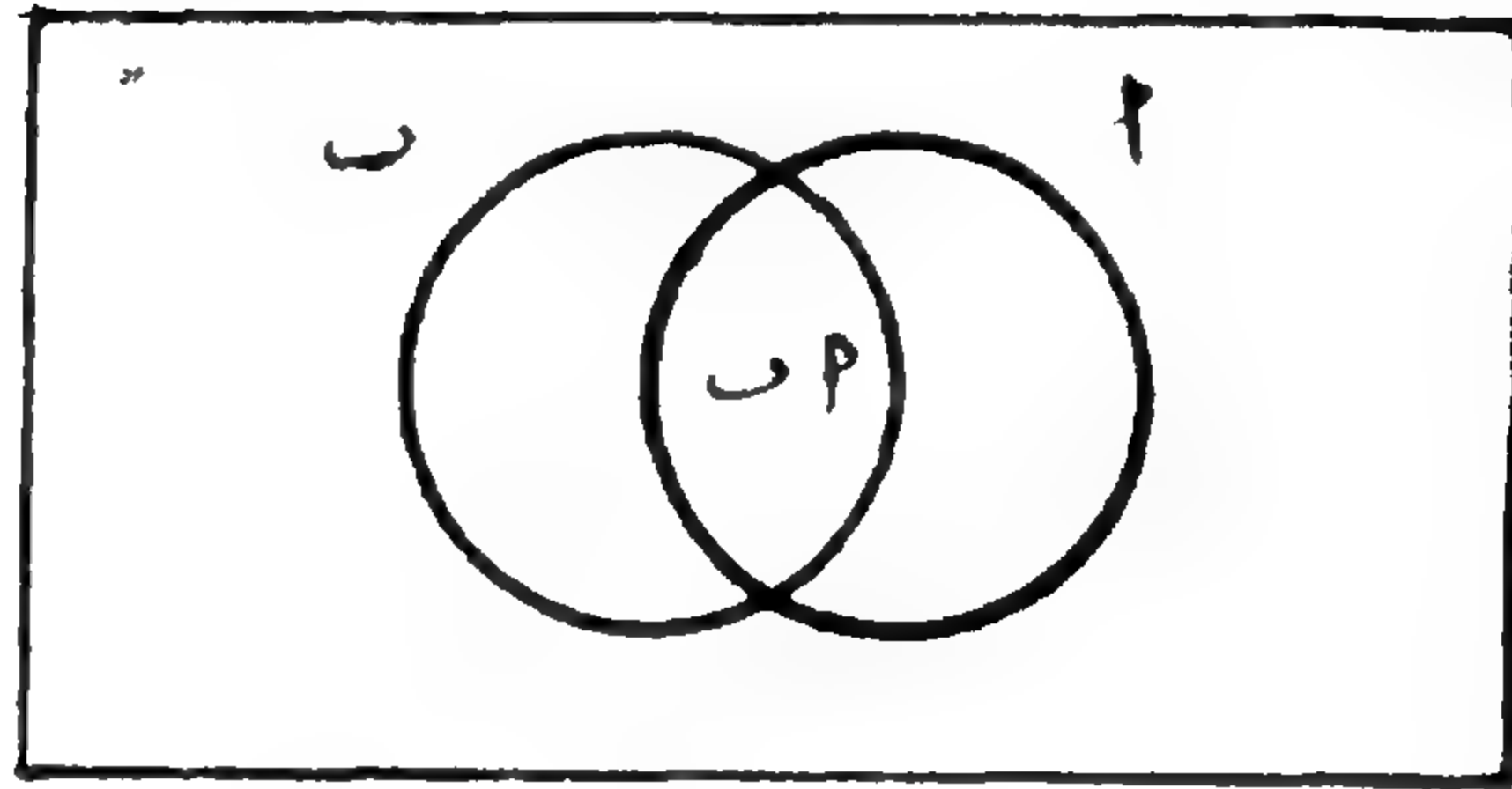
- ١ — إجراءات تتخذ إزاء الفئات فتنتج عنها فئات .
- ٢ — إجراءات تتخذ إزاء الفئات ، بالإضافة إلى العلاقات ، فتنتج عنها قضايا لا فئات .

(١) ومن أهم الإجراءات التي تمثل النوع الأول ما يأتي .

أولا : الضرب المنطقي

يتضح من الرسمين السابقين السابقين أن عالم المقال يتكون من فئتين هما (\bar{p}) ، والفئة المكمل لها وهي $\bar{\bar{p}}$.

وبما أننا نستطيع أن نذكر دائماً الفئة للكلمة لأية فئة ، بواسطة نفي الفئة الأصلية ، فإن عالم المقال المكون من فئتين سوف يحتوي أو يشتمل على أربع فئات فرعية ممكنة . وبعبارة أخرى ، لو أننا ومعنا من شكل فن جعلناه محتويًا على فئتين أصليتين هما A و B لأمكن رسمه على النحو الآتي :



شكل ٣

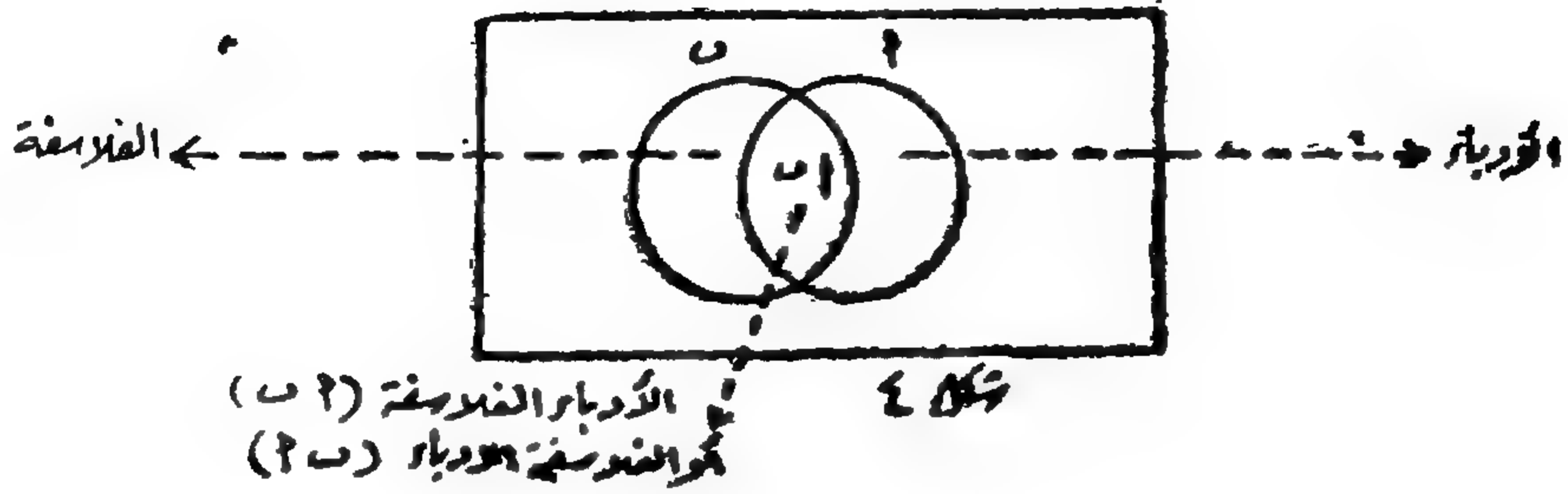
وتسمى الفئة الشاملة للصادقات المشتركة بين الفئتين A ، B ، أي الفئة $(A \cap B)$ التي تنتج عن تقاطع الفئتين A ، B أو عطفهما أو حاصل ضربهما ، تسمى بالفئة العطفية Conjunctive Class . ومن الواضح في الشكل السابق أن عدد ما صدقات الفئة $A \cap B$ المعبرة عن حاصل ضرب Logical product الفئتين A ، B أقل من عدد ما صدقات أو أعضاء كل واحدة في الفئتين على حدة ، فضلاً عن ما صدقاتهما معاً . ومن ثم فإن الفئة $(A \cap B)$ تكون متضمنة في الفئتين A ، B معاً طالما أنها جزء من A ، وجزء من B في وقت واحد . ولنأخذ المثال التالي لتوضيح هذا المعنى : فلو كان عالم المقال الذي تتكلم عنه يتكون من فئتين هما فئة الأدباء (A) وفئة الفلاسفة (B) كانت إذن فئة الأدباء الفلاسفة $(A \cap B)$ أو فئة الفلاسفة الأدباء $(B \cap A)$:

١ — جزءا من فئة الأدباء على حدة (A) ، لأن الأدباء الفلاسفة هم بعض الأدباء .

(م ٣ — أسس المنطق الرمزي)

٢ — وجزءاً من فئة الفلاسفة على حدة (ب) ، لأن الفلاسفة الأدباء هم بعض الفلاسفة .

٣ — أو كانت هي جزءاً من الفئتين معاً . وهذا ما يتضح من الرسم التالي :



— ولذا فإننا عادة ما نعرف حاصل الضرب المنطقي لفئتين بأنه : هو الفئة التي

تكون :

١ — متضمنة في الفئتين أو مندرجة ومحتواة فيهما معاً .

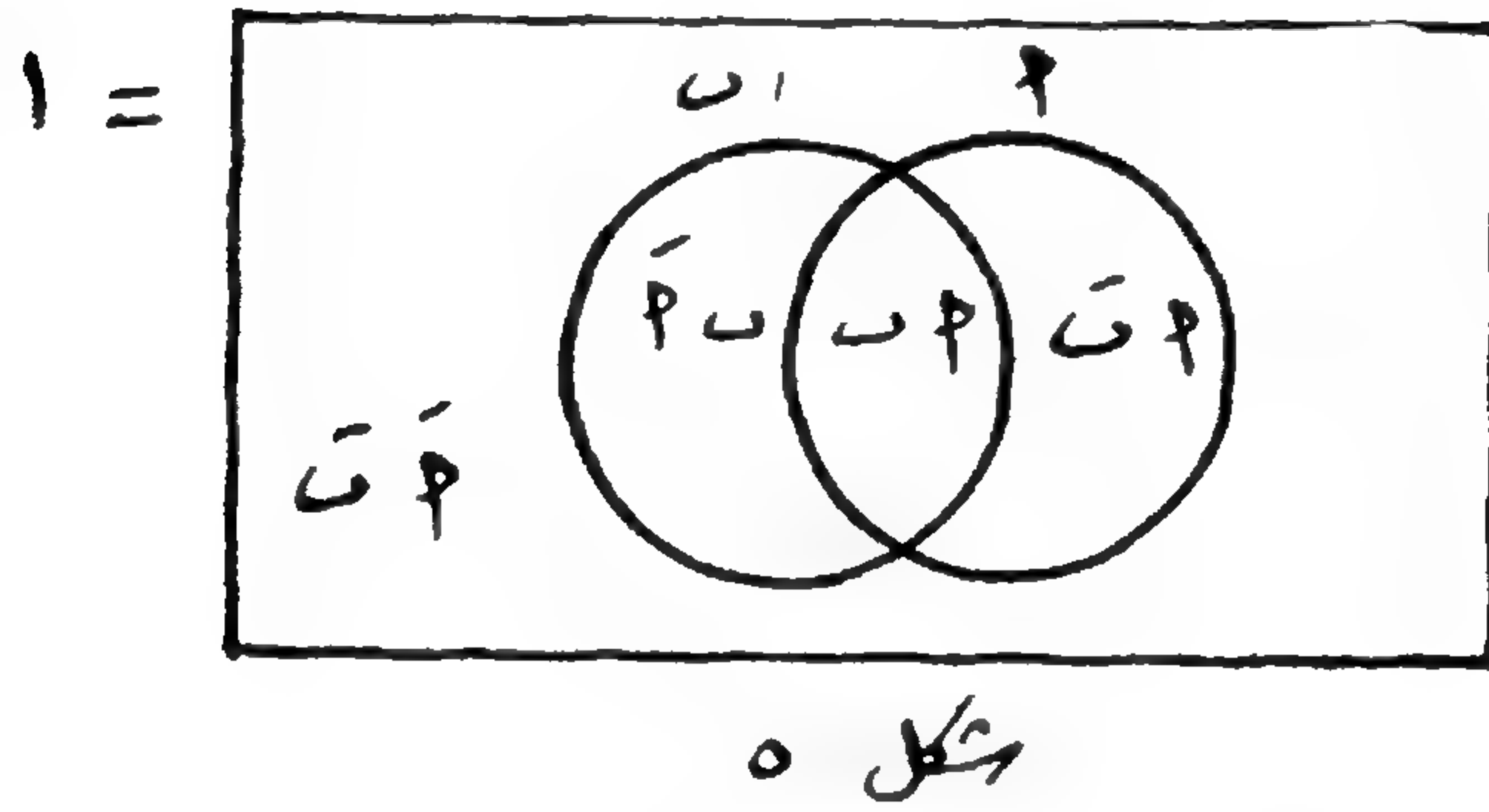
٢ — وتكون متضمنة أو مشتملة لكل فئة ، مندرجة أو محتواة في كل منهما .

بمعنى أنه لو كانت فئة الأدباء الفلاسفة تحتوي على فئة هي س من الذين يعبرون عن الفلسفة الوجودية ، وفئة أخرى هي ص من الذين يعبرون عن الفلسفة غير الوجودية . ولو كانت فئة الفلاسفة الأدباء تحتوي على فئة هي ع ممن يؤمنون بالأدب الملزم وعلى فئة أخرى هي م ممن لا يؤمنون بالالتزام في الأدب . كانت الفئة ا مشتملة على كل من الفئات : س ، ص ، ع ، م من حيث هي فئات صغرى أو فرعية مندرجة تحت ا ، ب معاً . لذا عادة ما يعرف حاصل الضرب المنطقي لفئتين بأنه أكبر فئة يمكن أن تشمل الفئتين أو تكون مشتركة بينهما (١) .

(١) دكتور عبد الرحمن بدوي : المنطق الصوري والرياضي ، الطبعة الثانية ،

وعادة ما يرمز لهذه الفئة الدالة على حاصل ضرب فئتين ، على النحو المتقدم ،
 بوحدة بسيطة من المتغيرات مثل (١ ب) ، كما نستخدم أحيانا علامة الضرب (×)
 المستخدمة في الرياضيات للتعبير عن هذا الإجراء بين الفئات في المنطق ، فنكتب أيضا :
 (١ × ب) . (١)

هذا ويلاحظ : أولا : أننا نستطيع تسمية بقية فئات عالم المقال الثلاث المتبقية
 على النحو الذي فعلناه بالنسبة للفئة ١ ب ، وذلك كما يلي :



١ — أن الفئة التي ينتمي أعضاؤها إلى الفئة ١ ، لكنهم لا ينتمون إلى
 الفئة ب ، تكون هي حاصل ضرب الفئتين ١ ، ب . ومن ثم يرمز لها بالرمز
 (١ ب) أي الفئة التي تشتمل على أعضاء يتصف كل منهم بأنه ١ ، وبأنه ليس ب في
 وقت واحد . (الأدباء الذين لا ينتمون إلى فئة الفلاسفة) .

٢ — إن الفئة التي ينتمي أعضاؤها إلى الفئة ب لكنهم لا ينتمون إلى الفئة ١ ،
 تكون هي حاصل ضرب الفئتين ب ، آ . ومن ثم يرمز لها بالرمز (ب آ) ،
 أي الفئة التي تشتمل على أعضاء يتصف كل منهم بأنه ب ، وبأنه ليس آ في وقت
 واحد . (الفلاسفة الذين لا ينتمون لفئة الأدباء) .

(١) وكان يانو G. Peano عالم الرياضيات الإيطالي مثلا يستخدم العلامة Ω للتعبير
 عن ضرب الفئات .

٣ — إن الفئة التي لا ينتمى أعضاؤها إلى أى من الفئتين A أو B ، بل ينتمون إلى الفئة التي تتكون من كل ما هو ليس A وليس B في وقت واحد . تكون هي حاصل ضرب الفئتين A ، B . ومن ثم يرمز لها بالرمز $\overline{A \cdot B}$. (١)

ثانياً : إن الفئة للمركبة للفئة A (أى الفئة \overline{A}) في شكله ، تحتوى في وقت واحد على :

١ — ذلك الجزء من عالم المقال الذي يكون خارجاً عن الفئة A ، لكنه ينتمى لفئة B ، أى $(A \cdot B)$.

٢ — وذلك الجزء من عالم المقال الذي يكون خارجاً عن الفئة A ، وعن الفئة B في الوقت نفسه ، أى $(\overline{A \cdot B})$.

وعلى ذلك فإن : $\overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B} + (\overline{A \cdot B})$.

ثالثاً : إن الفئة للمركبة للفئة B (أى : \overline{B}) ، تحتوى — في الشكل السابق نفسه — على :

١ — ذلك الجزء من عالم المقال الذي ينتمى إلى الفئة A ولا يكون متصفاً إلى الفئة B ، أى $(A \cdot \overline{B})$.

٢ — وذلك الجزء من عالم المقال الذي لا ينتمى إلى الفئة A ولا إلى الفئة B في وقت واحد ، أى $(\overline{A \cdot B})$.

وعلى ذلك فإن : $\overline{A \cdot B} = \overline{A \cdot B} + (\overline{A \cdot B})$.

رابعاً : ضرورة التفرقة وعدم الخلط بين الفئتين التاليتين :

$$(\overline{A \cdot B}) , \overline{A \cdot B}$$

فالرمز الأول $(\overline{A \cdot B})$ ^(٢) يدل على الفئة المركبة لحاصل ضرب الفئتين A ، B ،

أى الفئة $A \cdot B$. أما الرمز $\overline{A \cdot B}$ فيعني حاصل ضرب فئتين مكملتين للفئتين A ، B (وهما A ، B) . ولكي تزداد هذه التفرقة وضوحاً نقول :

(١) وتكتب أحياناً في بعض كتب المنطق كما يلي : $\overline{A \cdot B}$ ، أو تكتب أحياناً $\overline{A \cdot B}$.

(٢) وتكتب أحياناً على النحو الآتي : $(\overline{A \cdot B})$.

١ — إن الفئة السكّلة للفئة \overline{AB} ، أي $\overline{(AB)}$ ، إنما تشمل كل ما هو موجود في عالم المقال ولا يكون متميّزاً إلى الفئة AB . وهكذا فهي تشمل على : \overline{A} ، \overline{B} ، \overline{AB} وهذا ما يتضح من الشكل رقم ٥ .

$$\therefore \overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{AB} .$$

٢ — في حين أن الفئة \overline{A} \overline{B} إنما تشير إلى ما هو مشترك بين العنيتين \overline{A} ، \overline{B} في وقت واحد ، من حيث هي حاصل ضربهما للنطقي .

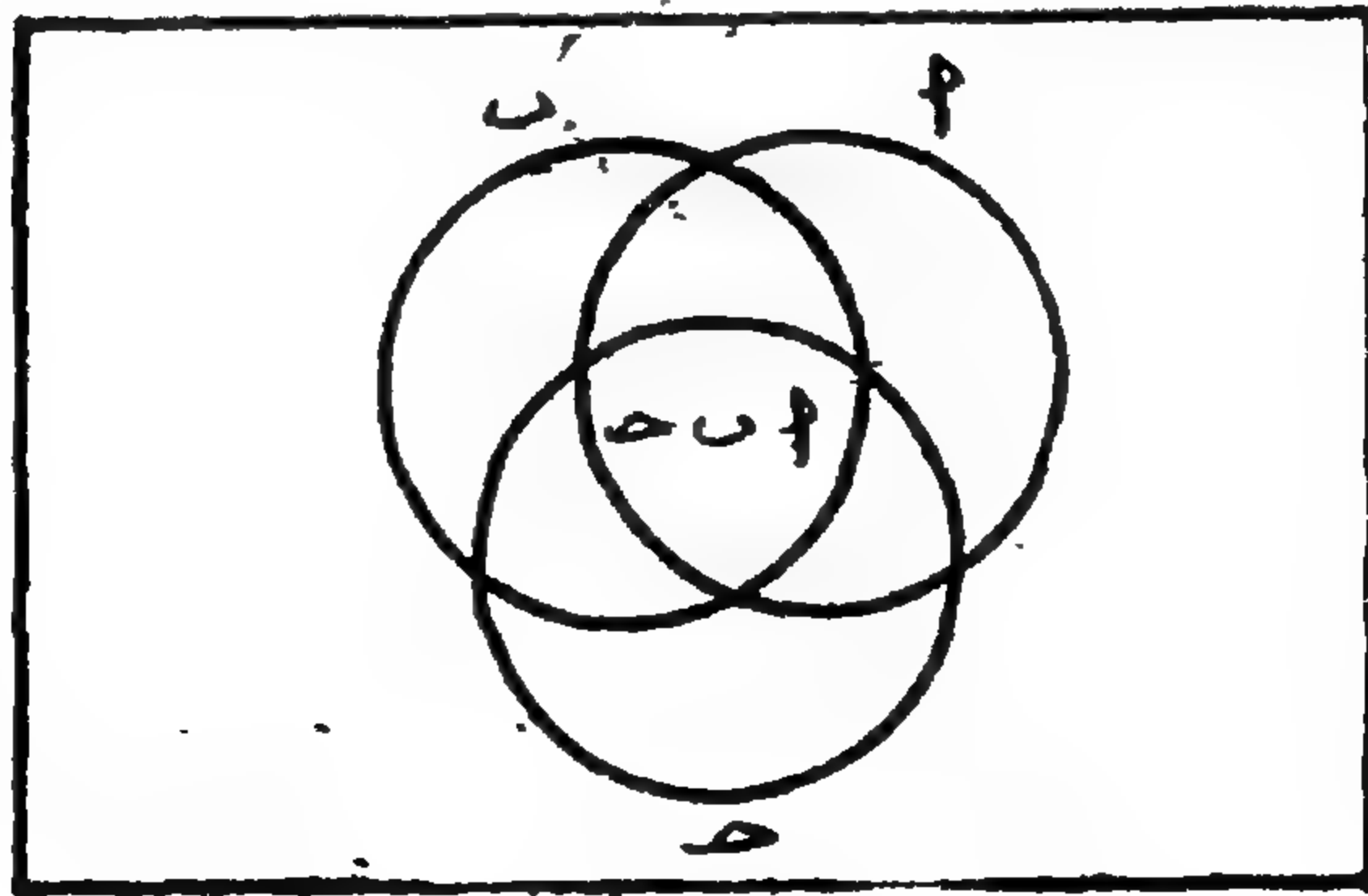
$$\text{فإذا كانت : } \overline{A} = \overline{A} + \overline{B} \text{ (في ثانياً)}$$

$$\text{وإذا كانت : } \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} \text{ (في ثالثاً)}$$

فإن ما هو مشترك بين \overline{A} ، \overline{B} في وقت واحد هو \overline{AB} .

فإذا قارنا بعد هذا التحليل بين $\overline{(AB)}$ وبين \overline{A} لوجدنا أن \overline{A} عبارة عن جزء من الفئة $\overline{(AB)}$ ، طالما أن $\overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{AB}$.

خامساً — لو أننا وسعنا من شكل فن جعلناه شاملاً لثلاث فئات بدلا من فئتين ، لتبين لنا أن القواعد والملاحظات السابقة تنطبق كذلك في هذه الحالة الجديدة ، ولنرسم شكل فن محتويا على ثلاث فئات كما يلي : —



شكل ٦

فلو كانت a تشير مثلاً إلى فئة الطلبة ، وكانت b تشير إلى فئة الناجحين ، وكانت c تشير إلى فئة الأذكاء ، لكان حاصل الضرب المنطقي لهذه الفئات الثلاث ، هو الفئة :

$$a \cdot b \cdot c$$

أي الفئة التي لو اخترنا أي عضو منها لكان طالباً ناجحاً ذكياً في الوقت نفسه.

بعض نتائج الضرب المنطقي للفئات :

$$1 - a \times b = b \times a \quad (1)$$

فلو كانت a تعبر عن فئة الطلبة ، وكانت b تعبر عن فئة الموظفين ، فإن الأمر يستوى لو بدأت بضرب الفئة a في الفئة b أو بالعكس . إذ سواء كنت أتكلم عن فئة الطلبة للموظفين أو فئة الموظفين للطلبة ، فعدد الأعضاء أو للاصدقات واحد في الحالتين ، أو بمعنى أكثر دقة إن للاصدقات هي هي نفسها في الحالتين . لأن الأفراد التي أحصل عليها حين أبدأ من فئة الطلبة (a) وأفرز منها من هو موظف ، تكون هي نفسها الأفراد التي أحصل عليها لو بدأت من فئة الموظفين (b) وفرزت منهم من هو طالب .

$$2 - a = a \times 1 \quad (2)$$

لأننا لو حاولنا أن نختار من بين أفراد الفئة a ، من يتصف منهم بكونه a ، لحصلنا على جميع ما صدقات الفئة a بأكملها ، لأن كل عضو منهم يتصف بالفعل بكونه a ، وإلا لما أمكن ابتداء أن يكون عضواً في هذه الفئة .

$$(1) \text{ أو : } a = a \times 1$$

$$(2) \text{ أو : } 1 = 1 \times 1$$

هذا ويلاحظ أيضا في هذه الحالة :

أولا : إن هناك اختلافا بين حاصل الضرب في المنطق وحاصل الضرب في الحساب والجبر ، لأننا لو ضربنا العدد الواحد في نفسه - في الحساب - أو الرمز الواحد في نفسه - في الجبر - كان حاصل الضرب في كلتا الحالتين مختلفا عن الرمز المضروب ، مثل :

$$٢ \times ٢ = ٤ \quad (\text{في الحساب})$$

$$١ \times ١ = ١ \quad (\text{في الجبر})$$

$$١ \times ١ = ١ \quad (\text{في المنطق})$$

ثانيا : إننا مهما كررنا إجراء ضرب الفئة الواحدة في نفسها مرة أو مرتين أو ثلاث أو ألف مرة لحصلنا على الفئة نفسها ، لأننا في كل مرة نقوم فيها بإجراء الضرب إنما نختار من الفئة كل الأفراد المتصفة بكونها ١ ، فنحصل على جميع أفراد الفئة ١ هي هي بعينها .

$$\text{ولذا فإن : } ١ = \dots \times ١ \times ١ \times ١ \times ١$$

$$٣ - \quad ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

أى لو كانت ١ فئة ذات أعضاء ، ثم حاولنا أن نقرز منها ونختار الأعضاء التي تنتمي إلى الفئة الفارغة ، أى الأعضاء التي لا وجود لها ، لما حصلنا على أى عضو . ولذا تكون النتيجة هي « صفر » . والواقع أن للفئة الفارغة أو الصفرية يمكن أن تكون نتيجة لأكثر من إجراءات من إجراءات ضرب الفئات مثل :

١ - فهي يمكن أن تكون حاصل ضرب أية فئة (مثل ١) \times الصفر ، فتكون النتيجة صفراً كما هو الحال في المثال السابق .

ب - أو أن تكون حاصل ضرب أية فئة في الفئة المكمل لها مثل $(1 \times 1 = \text{صفر})$. لأننا لو فرضنا أو اخترنا من الفئة ١ ، الأعضاء التي لا تكون هي ١ (أي التي تكون ٠) ، لما حصلنا على أي عضو ، ومن ثم تكون النتيجة مساوية للصفر .

ج - أو أن تكون حاصل ضرب فئتين لا يمكن وجود أعضاء ينتمون إليهما معاً وفي وقت واحد ، فلو كانت ١ ترمز إلى فئة الدوائر ، وكانت ب ترمز إلى فئة المربعات فإن حاصل ضرب الفئتين ١ ب يكون مساوياً للصفر . لأنه لا وجود لأعضاء ينتمون إلى الفئة ١ وإلى الفئة ب في وقت واحد ، أي لا وجود مثلاً لشكل هندسي يكون مربعاً ويكون مستديراً في وقت واحد ومن وجهة نظر واحدة . وعلى ذلك يكون حاصل ضرب الفئتين مساوياً للصفر على الرغم من أن كلا من الفئتين لهما أعضاء وليست بالفئة الفارغة . ومن ثم ، ففي مثل هذه الحالة تكون :

$$1 \times ب = \text{صفر} .$$

ثانياً : الجمع المنطقي

وهو عبارة عن إضافة أعضاء فئة ما إلى أعضاء فئة أخرى ، لتكوين فئة جديدة يكون أعضاؤها من ينتمون : إما إلى الفئة الأولى ، أو إلى الفئة الثانية ، أو مما ينتمون إلى الفئتين معاً إذا كانت هناك أعضاء مشتركة بين الفئتين . وتسمى الفئة الناتجة عن هذا الإجراء باسم حاصل الجمع المنطقي Logical Sum ، أو الفئة الفصلية Disjunctive Class ، وقد سميت بالفئة الفصلية لأن إجراء الجمع هو في حقيقته فصل بين أعضاء الفئتين المجموعتين ، على الرغم من جمعهما معاً في فئة

واحدة كبيرة ، بمعنى ان جمع فئتين لا يزال الفارق بين أعضائهما ، بل تظل أعضاء كل فئة متميزة عن أعضاء الفئة الأخرى ، ولنأخذ المثال التالي لتوضيح ذلك .
نفرض أن أمامي وعاءاً به عدد من الكرات الزرقاء ، وإن لدى إناء آخر به عدد من الكرات الحمراء ، فإذا ما وضعت ما في الوعاء الأول من كرات في الوعاء الثاني ، لأصبحت لدى مجموعة جديدة من الكرات كل واحدة منها إما أن تكون زرقاء أو حمراء . إذن فالإضافة هنا لم تطمس من معالم أعضاء كل فئة ، بل احتفظت لها بما يميزها عن أعضاء الفئة الأخرى . ولنأخذ مثلاً آخر لنزيد المعنى توضيحاً : فلو كنت أنكلم عن فئتين هما : فئة الطلبة (١) ، وفئة الطالبات (ب) ، فإن حاصل الجمع المنطقي للفئتين يكون هو الفئة التي لو اخترنا منها أى عضو جزافاً ، فلا بد أن يكون إما طالباً (أى ينتمى إلى الفئة ١) ، وإما طالبة (أى تنتمى إلى الفئة ب) . وهكذا فنحن أمام بديلين لا بد وأن ينتمى إلى أحدهما أى عضو من أعضاء الفئة التي تمثل حاصل جمع الفئتين .

ولذا فإننا عادة ما نعرف حاصل الجمع المنطقي لفئتين بأنه الفئة التي تكون شاملة لكل من الفئتين ، وتكون متضمنه ومحتواه في أية فئة أخرى تشمل الفئتين ، أو هي أصغر فئة يمكن أن تشتمل على الفئتين ، كما يسمى الأجراء في مثل هذه الحالات السابقة بإسم الجمع القوي الذي يدل على ما يسمى بإسم الفصل القوي تمييزاً له عن الفصل الضيف .

الفصل القوي والفصل الضيف :

١ — الفصل القوي Strong Disjunction ، ويرمز له بين الفئات بالرمز $(+)$ الذي يمكن التعبير عنه في اللغة العربية بالقول « إما... أو... » ، ويعبر

عنه بالإنجليزية : « either ... or ... » ، وباللاتينية « aut ... aut ... » ،
ويسمى أحياناً باسم الفصل الاستبعادي Exclusive أو غير الشمولي ، ويفيد القول
بإما كذا ، أو كذا ، مع استحالة الجمع بين البديلين . والأمثلة السابقة كلها توضح
مثل هذا النوع من الفصل .

٢ — أما الفصل الضعيف Weak Disjunction ، ويرمز له بين الفئات بالرمز
« + » (١) الذي يمكن التعبير عنه في اللغة العربية بالأداة « أو » ، ويعبر عنه
بالإنجليزية بالكلمة « or » وفي اللاتينية بالكلمة « vel » ، ويسمى أحياناً باسم
الفصل الشمولي Inclusive أو غير الاستبعادي ، وهو لا يعنى الفصل الكامل بين
الفئتين المجموعتين ، بل يفيد احتمال اشتراكهما في عدد من الأعضاء في الوقت نفسه ،
وهذا ما يتضح من المثال التالي : لو رمزنا إلى فئة الأدباء بالرمز أ ، وإلى فئة الفلاسفة
بالرمز ب ، لكان حاصل جمعهما المنطقي هو الفئة التي تتكون من : —

أولاً : كل من هو أديب فقط ولا علاقة له بالفلسفة .

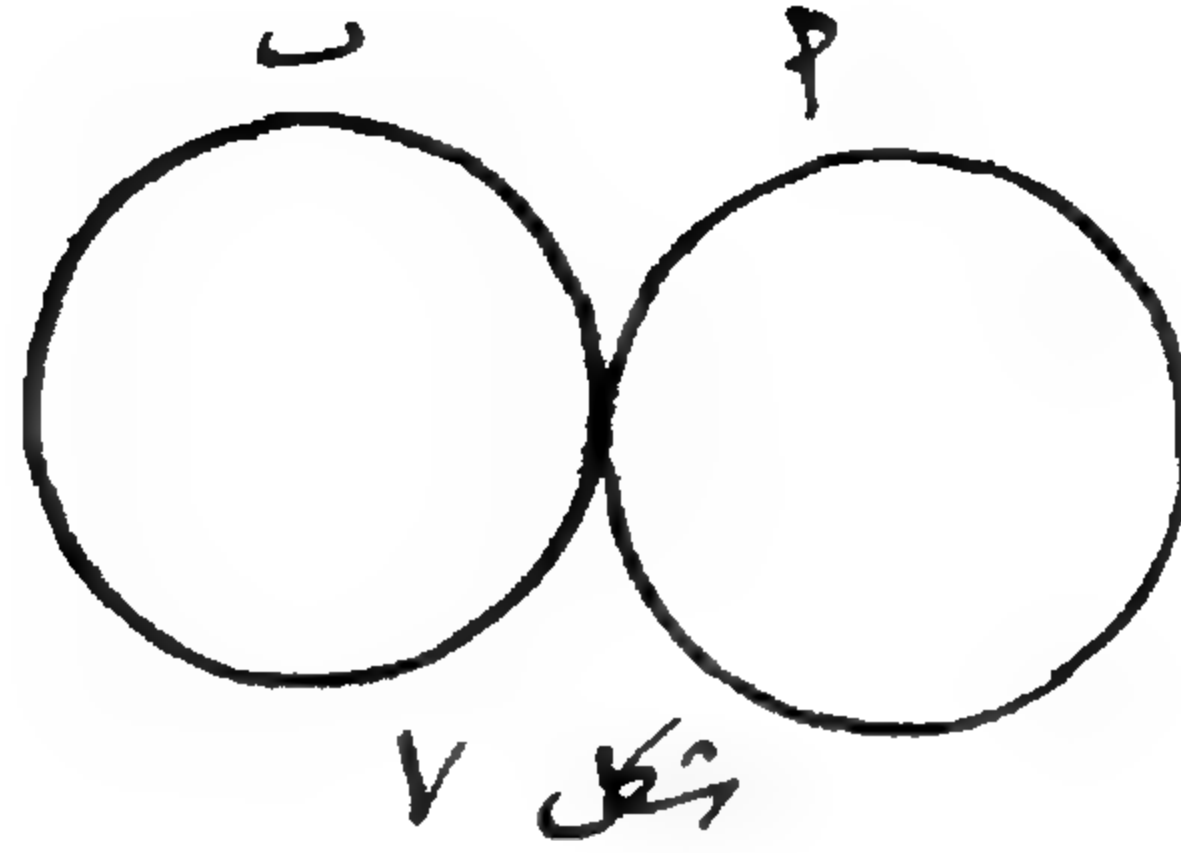
ثانياً : كل من هو فيلسوف فقط ولا علاقة له بالأدب .

ثالثاً : كل من هو أديب وفيلسوف في الوقت نفسه (طالما أن بعض الأدباء
فلاسفة وبعض الفلاسفة أدباء) .

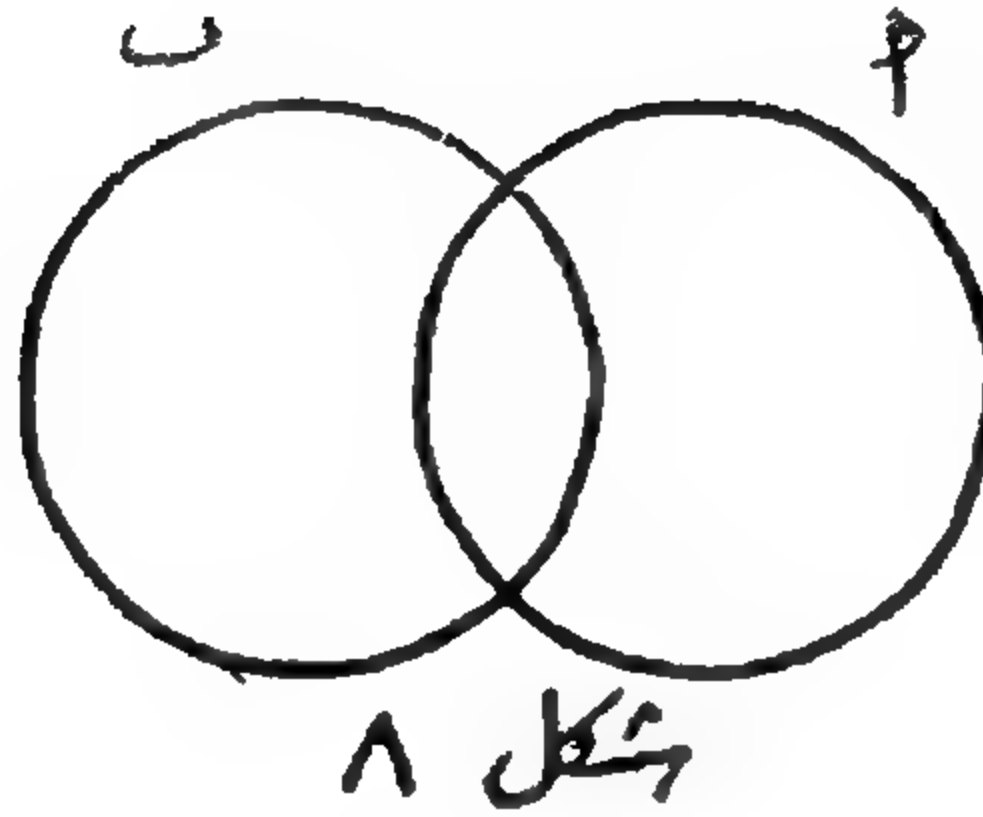
أي الفئة التي لو اخترنا منها أي عضو جزاءً ، لكان : إما فيلسوفاً أو أديباً
أو أديباً فيلسوفاً أو (فيلسوفاً أديباً) في الوقت نفسه . وهكذا فالفصل الضعيف يفيد
معنى الاتصال مع إمكان الاتصال (أي أ أو ب أو هما معاً : أ ب) في حين أن
الفصل القوي يفيد معنى الاتصال مع استحالة الاتصال ، وهذا ويمكن التعبير عن
إجراء الجمع بنوعى الفصل فيه كما يلي : —

(١) وكان يانو يستخدم العلامة التالية : U

الفصل القوي :



ويعبر عنه رمزياً كما يلي : $ا \oplus ب$
الفصل الضعيف :



ويعبر عنه رمزياً كما يلي : $ا + ب$

ونحن نميل إلى استخدام الفصل الضعيف للتعبير عن إجراء الجمع المنطقي بين الفئات جريباً على ما هو متبع في كثير من كتب المنطق الحديث .

ملاحظات عامة تتعلق بجميع الفئات :

بتطبيق إجراء الجمع المنطقي بالنسبة لشكل فن نلاحظ ما يأتي : —
١ — إن الفئة $(ا + ب)$ — في الشكل — تكون من جميع الأعضاء للوجود في $ا$ ، $ب$ ، $ا\bar{ب}$ ، $\bar{ا}ب$. ومن ثم فإننا نستنتج :
 $ا + ب = ا\bar{ب} + \bar{ا}ب + ا + ب$

٢ — إن الفئة المكمل للفئة $(\bar{a} + b)$ أى الفئة $(\overline{a + b})$ ، تشتمل على كل ما هو ليس $(\bar{a} + b)$ ، أى ما يتبقى من عالم المقال لو استبعدنا منه $(\bar{a} + b)$ وما يتبقى فى عالم المقال فى هذه الحالة سيكون هو الفئة \bar{a} . ومن ثم فإننا نستنتج أن : —

$$\bar{a} = (\overline{a + b})$$

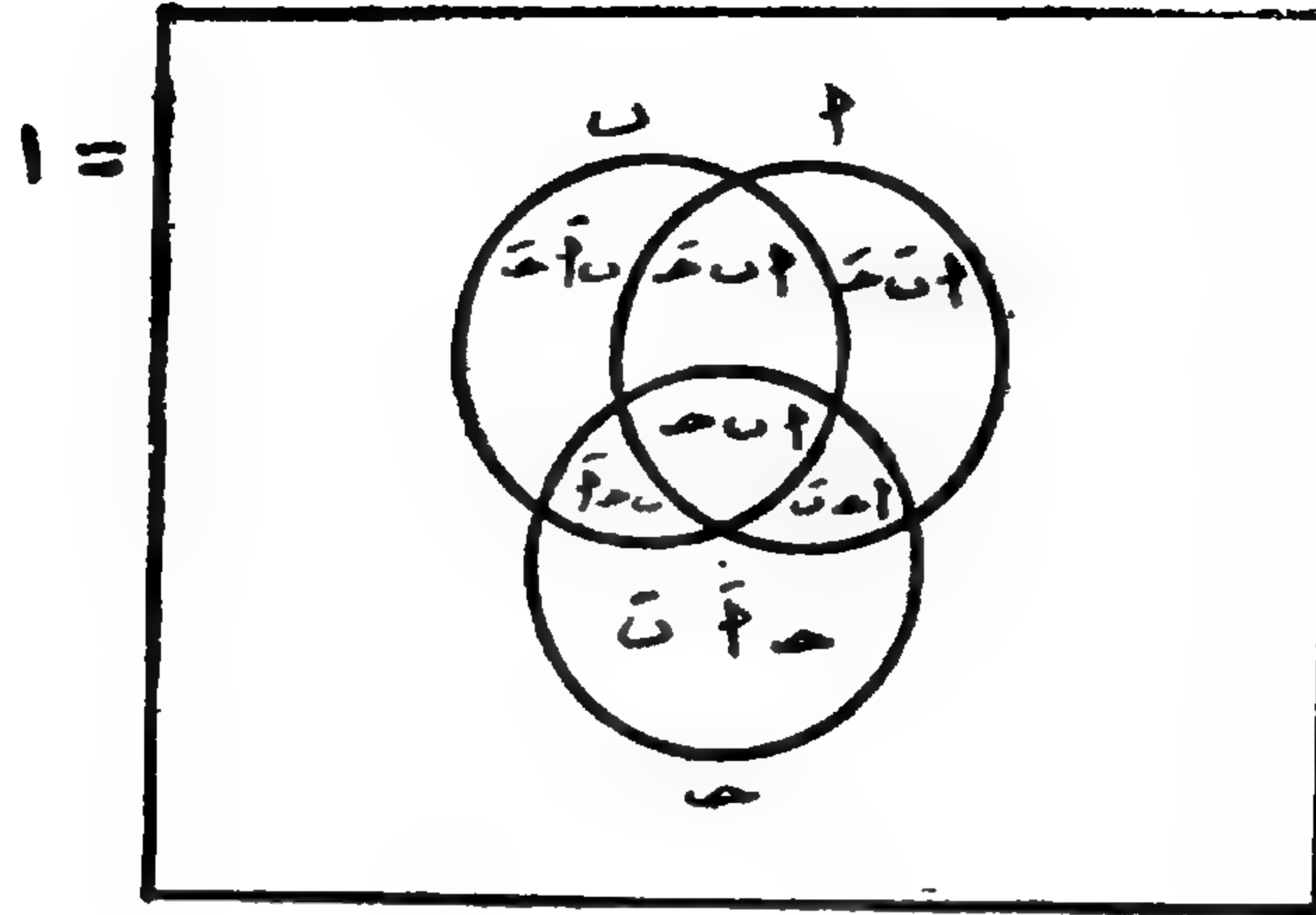
٣ — أننا بإضافة الفئة a إلى الفئة للمكمل للفئة b ، نحصل على الفئة $(\bar{a} + b)$ ، وتكون الفئة للمكمل لها هى : $(\overline{\bar{a} + b})$ وهكذا يمكننا باستخدام إجراء الأكمال وإجراء الجمع أن نتوصل إلى عدة فئات جديدة ، مثل إضافة الفئة \bar{b} إلى الفئة \bar{a} فنحصل على الفئة $(\bar{a} + \bar{b})$ التى تكون الفئة المكمل لها هى : $(\overline{\bar{a} + \bar{b}})$ وهكذا .

٤ — علينا أن نميز ولا نخلط بين الفئة $(\bar{a} + b)$ والفئة $\bar{a} + b$ ، أى بين الفئة المكمل لفئة هى حاصل جمع فئتين ، وبين حاصل جمع فئتين مكملتين لفئتين . هذا ما يتضح من الشكل الذى نكتب فيه أن :

$$\bar{a} = (\overline{a + b})$$

فى حين أن $\bar{a} + \bar{b}$ إنما تساوى : $\bar{a} + \bar{b} + \bar{a} + \bar{b}$.

• — أننا لو وسعنا شكل فن فجمعناه شاملاً لثلاث فئات أو أكثر ، بدلاً من فئتين ، لتبين لنا أن القواعد السابق استخدامها ، تنطبق كذلك فى هذه الحالة الجديدة . ولترسم شكل فن محتويًا على ثلاث فئات ، على النحو الآتى : —



شكل ٩

في هذه الحالة يكون حاصل الجمع المنطقي لهذه الفئات الثلاث، أى (ب + ا + ح) معبراً عن الفئة الكبرى التى يتصف أى عضو فيها بأنه ينتمى :

- ١ -- إلى الفئة ا وحدها ، أى (ا ب ح) .
- ٢ -- أو إلى الفئة ب وحدها ، أى (ب ا ح) .
- ٣ -- أو إلى الفئة ح وحدها ، أى (ح ا ب) .
- ٤ -- أو إلى الفئتين ا ، ب فقط ، أى (ا ب ح) .
- ٥ -- أو إلى الفئتين ا ، ح فقط ، أى (ا ح ب) .
- ٦ -- أو إلى الفئتين ب ، ح فقط ، أى (ب ح ا) .
- ٧ -- أو إلى الفئات الثلاث ا ، ب ، ح فى وقت واحد ، أى (ا ب ح) .

هذا ويلاحظ أن الفئة المسكدة للفئة (ب + ا + ح) ، هى الفئة (ب + ا + ح) التى تناظر وتساوى الفئة (ا ب ح) فى الوقت نفسه .
وسنزيد هذه الملاحظة الأخيرة توضيحاً فيما بعد .

بعض نتائج الجمع المنطقي للفئات :

$$١ - \quad ١ + ١ = ١ + ١$$

فلو كانت ١ ترمز إلى فئة الطلبة ، ب ترمز إلى فئة الطالبات ، فإن حاصل جمع الفئتين منطقياً لن يتغير سواء جمعنا ١ إلى ب أو ب إلى ١ ، لأننا في كلتا الحالتين سنحصل على الفئة الكبيرة التي لو اخترنا منها أى عضو جزافاً لوجدناه إما طالباً أو طالبة . وعلى ذلك فسيان لدينا لو بدأنا بجمع فئة الطلبة إلى فئة الطالبات (١ + ب) أو بجمع فئة الطالبات إلى فئة الطلبة (ب + ١) ، فإن عدد ما صدقات حاصل الجمع المنطقي واحدة هي هي .

$$٢ - \quad ١ = ١ + ١$$

أى أن عدد أعضاء الفئة التي تتكون من « إما الأدباء أو الأدباء » ، سيكون هو نفسه عدد أعضاء الفئة المكونة من الأدباء فقط .

وبلاحظ في هذه الحالة :

أولاً : وجود اختلاف بين حاصل الجمع في المنطق ، وحاصل الجمع في الحساب والجبر ، لأننا لو جمعنا العدد الواحد إلى نفسه في الحساب أو الرمز الواحد إلى نفسه في الجبر ، لكان حاصل الجمع في كلتا الحالتين مختلفاً عن الرمز المجموع ، مثل :

$$٢ + ٢ = ٤ \quad (\text{في الحساب})$$

$$١ + ١ = ١٢ \quad (\text{في الجبر})$$

$$١ + ١ = ١ \quad (\text{في المنطق})$$

ثانياً : إننا مهما كررنا إجراء جمع الفئة الواحدة إلى نفسها مرة أو مرتين أو ثلاث مرات أو ألف مرة حصلنا على الفئة نفسها . لأننا في كل مرة نقوم فيها بإجراء جمع الفئة إلى نفسها ، إنما نقول بأعضاء الفئة ذاتها كأن نقول مثلاً : « الفلاسفة أو الفلاسفة » ، ويستوى الأمر سواء كررنا ذلك مرة أو أكثر فإن نتيجة ذلك هي هي نفسها أعضاء الفئة الأصلية المجموعة .

$$٣ - ١ + \text{صفر} = ١$$

أى أن عدد أعضاء الفئة الناتجة عن جمع أية فئة معلومة ، إلى فئة خالية من الأعضاء لن يزيد عن عدد أعضاء الفئة للمعلومة . فلو كانت I ترمز إلى فئة الأدباء ، كان عدد أعضاء الفئة المكونة إما من أعضاء فئة الأدباء ، أو من أعضاء لا وجود لها ، لا يزيد عن أعضاء فئة الأدباء .

ثالثاً : الطرح المنطقي

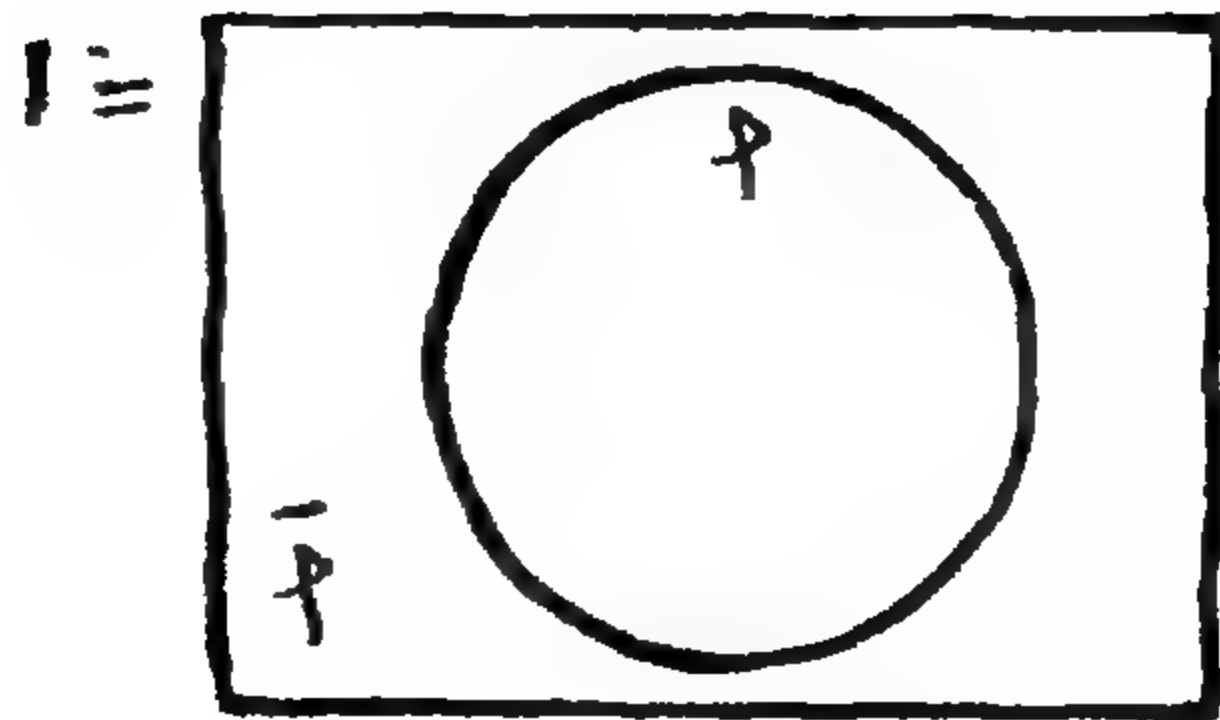
Logical Subtraction

بما أن عالم المقال ، وهو الواحد الصحيح ، يتكون دائماً من أية فئة ، والفئة المكمل لها مثل : $(١ = ١ + \bar{1})$ ، فإن أيّاً من الفئتين يساوى دائماً الواحد الصحيح وقد استبعدنا منه الفئة الأخرى . ولذا فإن : —

$$١ - ١ = \bar{1} \quad - ١$$

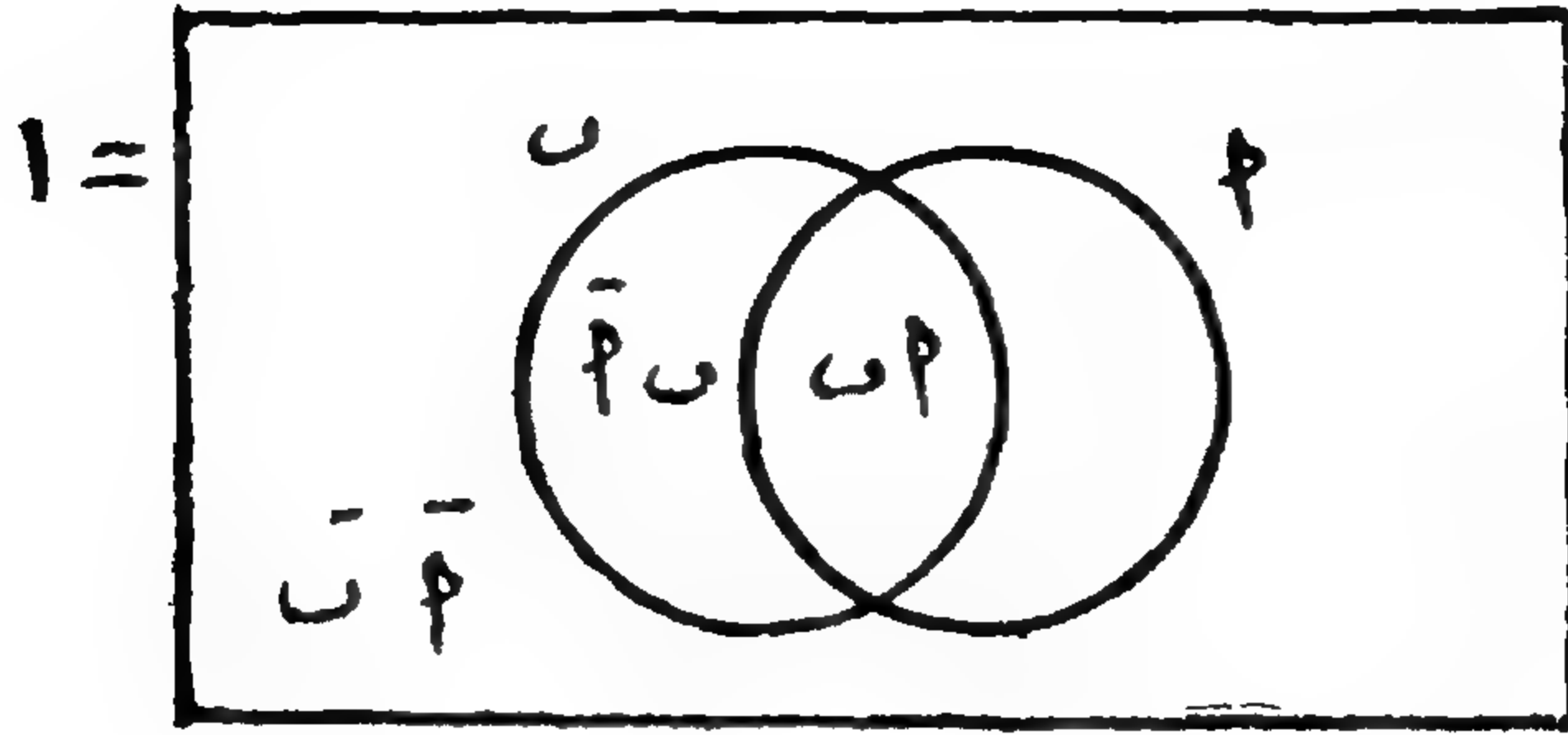
$$\bar{1} - ١ = ١ \quad - ٢$$

وهذا ما يتضح من الشكل التالى :



شكل ١٠

ولو أننا وسعنا الشكل السابق فأصبح على النحو الآتي : —



شكل ١١

لكانت الفئة \bar{A} مساوية لكل ما هو غير متممى إلى الفئة A في عالم المقال ، أى :
 $(A \cup \bar{A})$.

$$\text{وعلى ذلك فإن : } A \cup \bar{A} = I$$

$$\text{وبما أن } I - I = 0$$

$$\therefore (A \cup \bar{A}) - I = 0$$

$$\text{وبما أن } I - I = 0$$

$$\therefore A \cup \bar{A} = I - 0$$

رابعاً : الإجراء المركب من الضرب والجمع المنطقيين

$$\text{مثل : } (A + B) \cdot C = AC + BC$$

أى أن أعضاء الفئة C التى تصف بكونها إما A أو B ، تكون هى نفسها
 أعضاء الفئة المكونة من :

١ — الأعضاء الذين ينتمون إلى C ويتصفون بكونهم A .

٢ — أو الأعضاء الذين ينتمون إلى C ويتصفون بكونهم B .

ولنوضح ذلك بالمثال التالي (١) : فلو كانت ح تشير إلى فئة طلبة الجامعة، وفرضنا منها الأعضاء الذين هم إما طلبة كلية الآداب (أ) ، أو طلبة كلية العلوم (ب) ، فإن الأعضاء التي نحصل عليها تكون هي نفسها أعضاء الفئة المكونة إما من طلبة الجامعة بكلية الآداب (ح أ) أو من طلبة الجامعة بكلية العلوم (ح ب) .

ومما هو جدير بالملاحظة أن التعبير الرمزي « (أ + ب) ح » كله يعبر عن فئة ، وكذلك الحال بالنسبة للتعبير الرمزي : « (أ + ح) ب » .

خامساً : الإجراء المركب من الجمع والطرح المنطقيين

١ : مثل $ا = ١ - (ب + ح)$.

فإذا كان عالم المقال ، وهو الواحد الصحيح ، يتكون من ثلاث فئات هي أ ، ب ، ح التي تشير إلى فئات الأطفال والشباب والشيخوخة على الترتيب ، لكان عالم المقال (أي المجتمع) مكوناً من هذه الفئات الثلاث معاً .

فإذا كنا نتكلم عن فئة الأطفال (أ) في المجتمع ، كان علينا أن نستبعد منه كل ما لا ينتمي إلى فئة الأطفال ، أي كل ما هو أ :

وبما أن أ في هذه الحالة تساوي أعضاء الفئة المكونة إما من الشباب (ب) أو الشيخوخة (ح) ، فإن $ا = ب + ح$.

ولذا فإن : $ا = ١ - (ب + ح)$

وبالمثل فإن : $ب = ١ - (ا + ح)$.

وكذلك فإن : $ح = ١ - (ا + ب)$.

(١) والمثال مأخوذ من المثال الذي أورده الدكتور زكي نجيب محمود في كتابه « المنطق الوضعي » الجزء الأول ، الطبعة الرابعة ، صفحة ١٩٠ (م ٤ - أسس المنطق الرمزي)

ب : كما أن من الإجراءات ما يتخذ إزاء الفئات بالإضافة إلى العلاقات ، فتنتج عنها قضايا لا فئات . وسنسمى القضايا في هذه الحالة باسم قضايا الفئات Class Propositions ، أى القضايا المكونة من فئات ، تميزا لها عن القضايا التى ينظر إلى كل منها ككل ، لا من حيث مكوناتها .^(١) وفيما يلي بعض هذه القضايا :

١ — قضايا هوية الفئة Class Identity

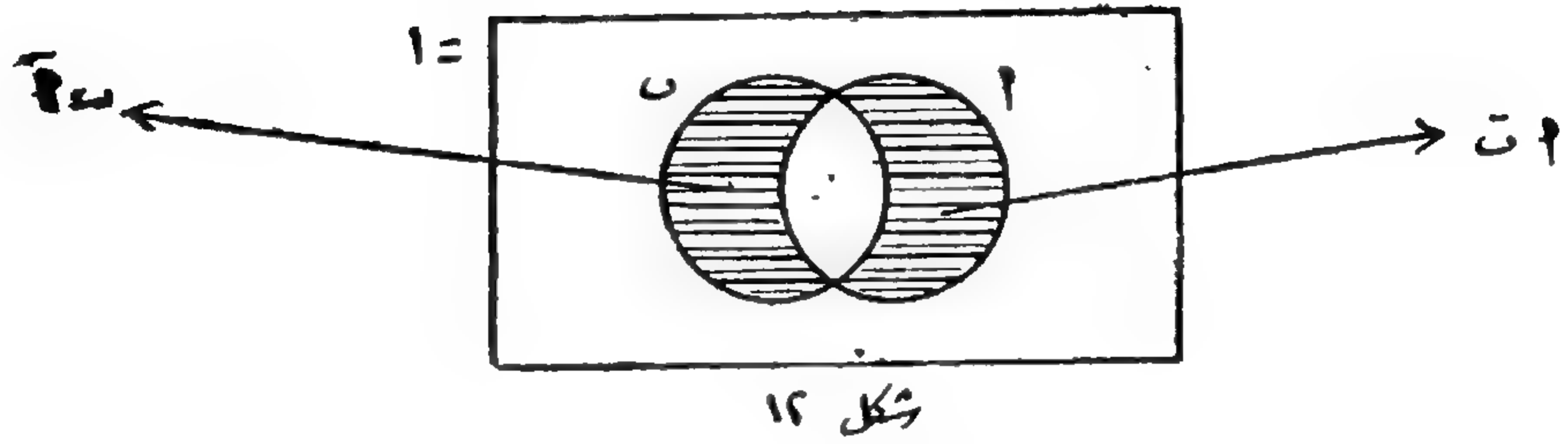
وهى تلك القضايا التى تثبت الهوية المنطقية بين فئتين . والهوية identity بين الفئات تعنى وجود تطابق ذاتى بين أعضائها ، فقولى إن الفئتين | ، ب بينهما هوية ، إنما يعنى أن الفئتين لهما نفس الأعضاء ، أو أنهما متطابقتان . ويمكن التعبير رمزيا عن هذا المعنى على النحو الآتى :

$$| = ب$$

ويلاحظ فى هذه الحالة أن العلامة « = » هنا لا تعنى مجرد التساوى الحسابى أو العددى ، بل تعنى الهوية بين الفئتين بالمعنى سالف الذكر . والفرق بين التساوى العددى وبين الهوية واضح ، ويمكن التعبير عنه بالقول بأن كل هوية تستلزم التساوى العددى ، فى حين أن التساوى العددى لا يستلزم الهوية بالضرورة . فلو كانت الفئتان التاليتان : | (فئة الكتب) ، ب (فئة الأقلام) ، متساويتين عدديا ، لما ترتب على هذا أن تكون انكتب هى الأقلام ولا الأقلام هى الكتب ، ومن ثم فالتساوى هنا لا يستلزم الهوية بينهما . أما لو كانت الفئتان التاليتان : |

(١) ويجدر بنا أن نلاحظ فى هذا الصدد أن الحديث هنا عن القضايا لا يتعلق بنظريه القضايا أو بالحساب التحليلى الخاص بالقضايا فى المنطق المعاصر ، إنما يتعلق أساسا بالحساب التحليلى الخاص بالفئات .

(فئة طلبة السنة الثالثة بقسم الفلسفة) ، ب (فئة من يدرسون المنطق المعاصر)
 بينهما هوية ، فإن هذا يستلزم التساوى العددي بينهما .
 ويمكن التعبير عن الهوية بين الفئتين ١ ، ب — باستخدام شكل فن — مع
 تظليل الفئات الفارغة أو المساوية للصفر ، على النحو الآتي : —



ويمكن تفسير الرسم السابق كما يلي : —

إذا كانت هناك هوية بين الفئتين ١ ، ب فليكن هناك إذن وجود لأعضاء
 تنتمي إلى ١ ولا تكون منتمية إلى ب . ولا لأعضاء تنتمي إلى ب ولا تكون
 منتمية إلى ١ . أى :

أولا : أن تكون الفئة ١ الخارجة عن ب أو (١ - ب) فئة خالية من الأعضاء .

ثانيا : وأن تكون كذلك الفئة ب الخارجة عن ١ أو (ب - ١) فئة خالية
 من الأعضاء .

٢ — قضايا عدم الهوية بين الفئات .

ونمثل لها بالصيغة التالية :

$$١ \neq ب$$

ونقرأ : ١ لا تتطابق ذاتيا مع ب ، أو ليست في هوية معها . ويلاحظ أننا
 لا نستطيع تمثيلها بواسطة شكل واحد فقط من أشكال فن وذلك لأن إثبات القول
 بعدم وجود هوية بين الفئتين ١ ، ب قد يعني : —

- ١ — أن الفئة a تشتمل على أعضاء خارجة عن نطاق الفئة b .
- ٢ — أو أن الفئة b تشتمل على أعضاء خارجة عن نطاق الفئة a .
- ٣ — أو أن تكون كل من الحالتين السابقتين صادقة ، بمعنى أن كلا من الفئتين a ، b تشتمل على أعضاء ، لكنها أعضاء غير مشتركة بين الفئتين .

كما يلاحظ أننا لا نستطيع تمثيل عدم الهوية بين الفئتين بتظليلهما في شكل فن . فنحن يمكن أن نظل الفئات في الشكل الخاص بالقضية ($a = b$) — على النحو الذي فعلناه في الشكل السابق رقم ١١ — لأن هذا الإثبات للهوية يعني :

أولاً : عدم وجود أعضاء في الفئة a بحيث تكون خارجة عن b ، أو في الفئة b بحيث تكون خارجة عن a .

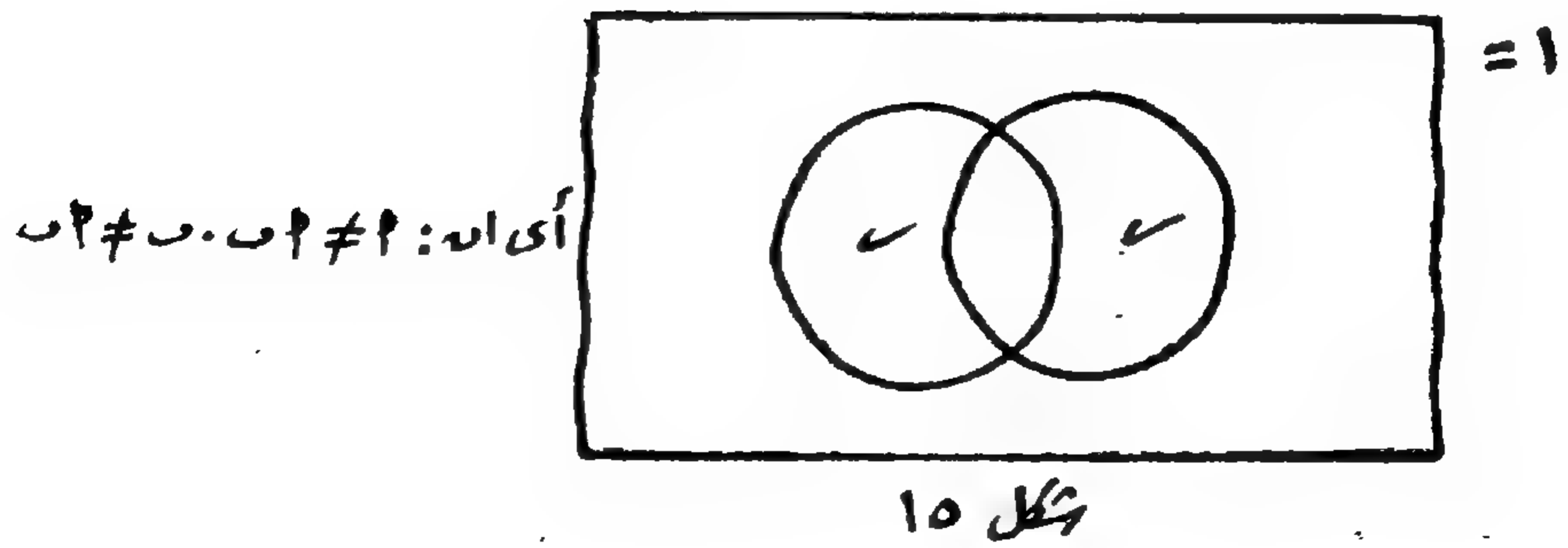
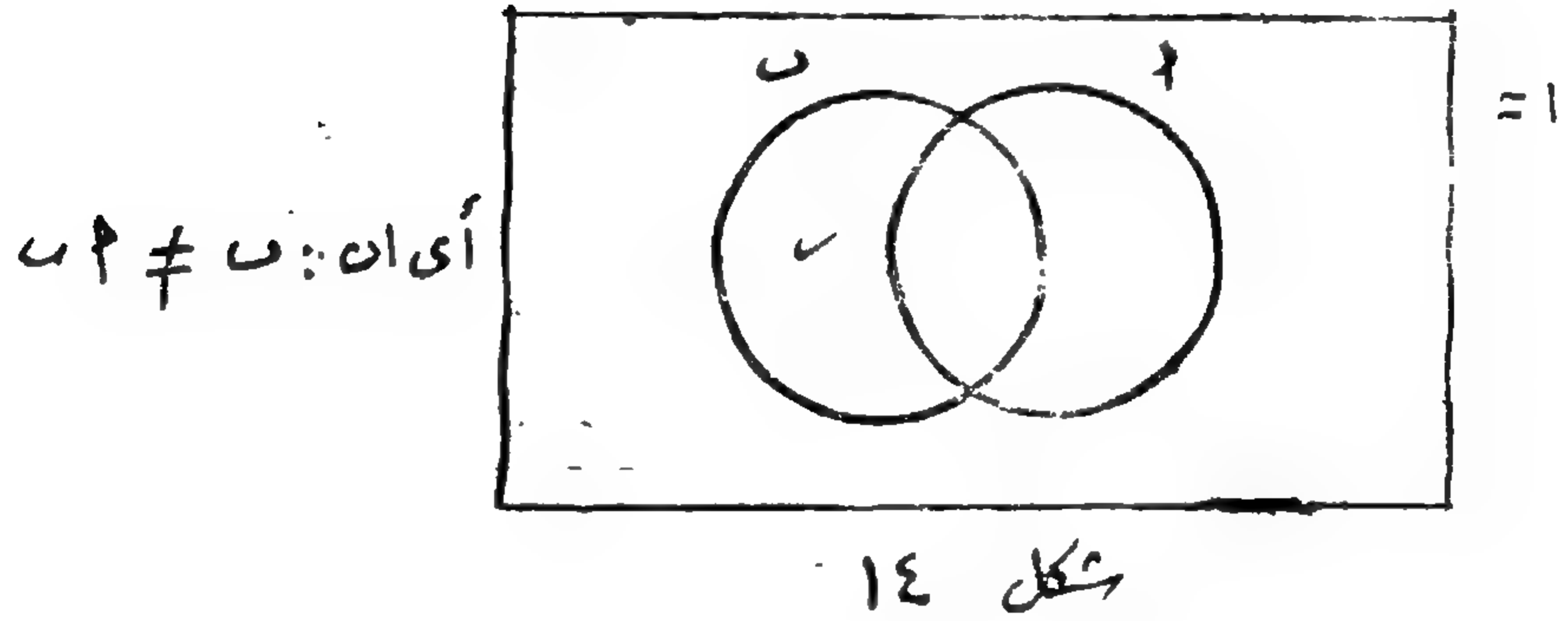
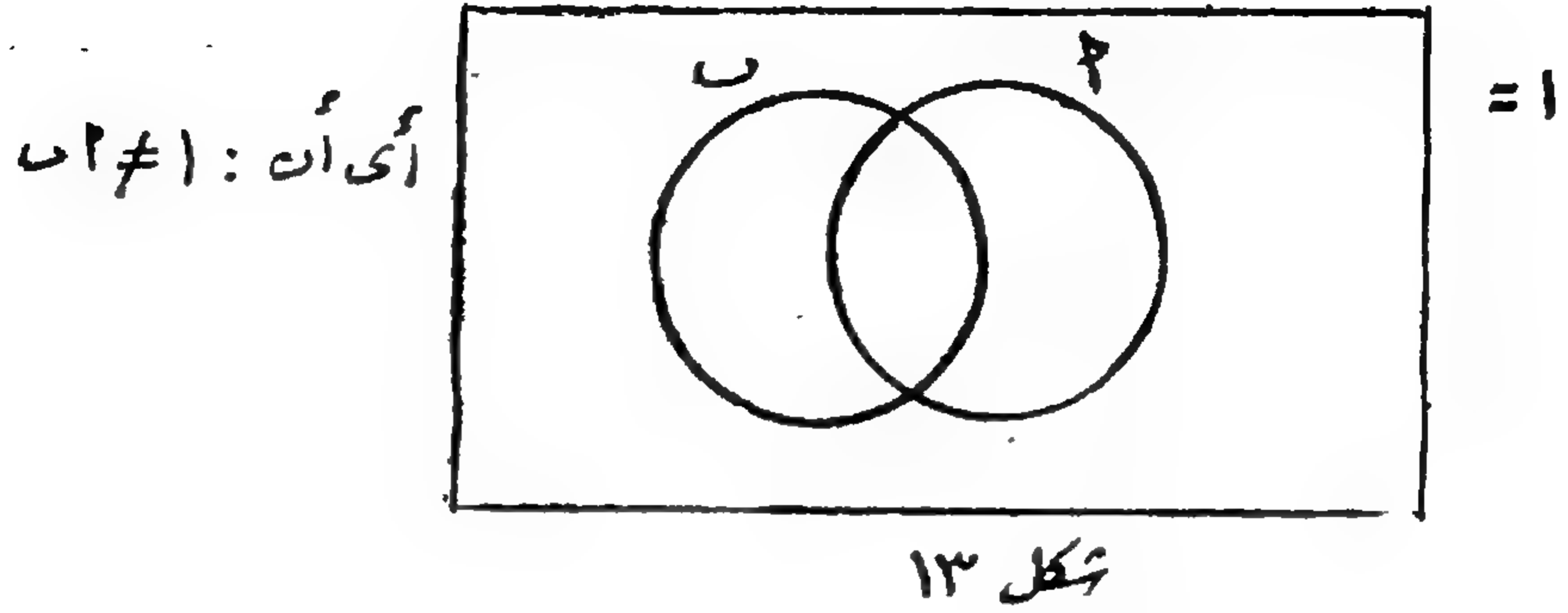
ثانياً : أنه لو وجدت أعضاء في الفئة a أو الفئة b بالفعل ، فتكون هذه الأعضاء مشتركة بين الفئتين .

إلا أننا لا نستطيع أن نفعل هذا في حالة عدم الهوية ، لأن القضية $a \neq b$ ليست تعبيراً عن افتراض وجود أعضاء في الفئتين ، إنما هي تقرير وإثبات بوجود عضوية فعلية بالنسبة للفئة a إنما هو ليس b ، أو بالنسبة للفئة b من الأعضاء التي ليست a . ولذا فعلينا إذا أردنا التعبير عن هذه القضية باستخدام شكل فن ، أن نأجأ إلى طريقة أخرى للتعبير عن العضوية الفعلية في الفئة ، وذلك كما يلي : بأن نضع علامة مثل « \vee » في الشكل ، لكي تعبر عن أن الفئة التي توضع عليها هذه العلامة ، ليست بالفئة الفارغة ، بل :

- ١ — أنها تحتوي على عضو واحد على الأقل .
 - ٢ — وأن هذا العضو غير محدد أو معروف بالذات .
- وهكذا تكون القضية : $a \neq b$

= ٥٣ =

قضية صادقة، إذا صدقت أى واحدة من القضايا التى تعبر عنها الأشكال التالية :



وبعبارة أخرى ، لو كانت تشير إلى فئة « المصريين » ، ب تشير إلى فئة « المسلمين » فإن القضية $a \neq b$ تكون صادقة لو وجد فرد واحد من المصريين ولم يكن مسلماً ، أو فرد واحد من المسلمين ولم يكن مصرياً ، أو إذا وجداً معاً « المصري غير المسلم والمسلم غير المصري » .

ومما هو جدير بالملاحظة أن كل شكل من الأشكال السابقة ، والتي يكفي كل واحد منها لتأكيد صدق القضية $a \neq b$ ، يمكن التعبير عنه رمزياً على أنه يمثل قضية خاصة . فالشكل رقم ١٣ لا يوضح فقط أن a ليست في هوية مع b ، بل يوضح بشكل أكثر دقة أنها ليست في هوية مع a . ومن ثم فالقضية التي يعبر عنها الشكل يمكن صياغتها رمزياً ، على النحو الآتي : $a \neq b$.

وبالمثل تكون القضية التي يعبر عنها الشكل رقم ١٤ ، رمزياً ، كما يلي : $b \neq a$ ، كما يمكن التعبير بطريقة رمزية عن القضية التي يعبر عنها الشكل رقم ١٥ ، على أنها إثبات مزدوج للقضيتين اللتين يعبر عنهما الشكلان رقم ١٣ ، ١٤ .

٣ — قضايا العضوية المفردة :

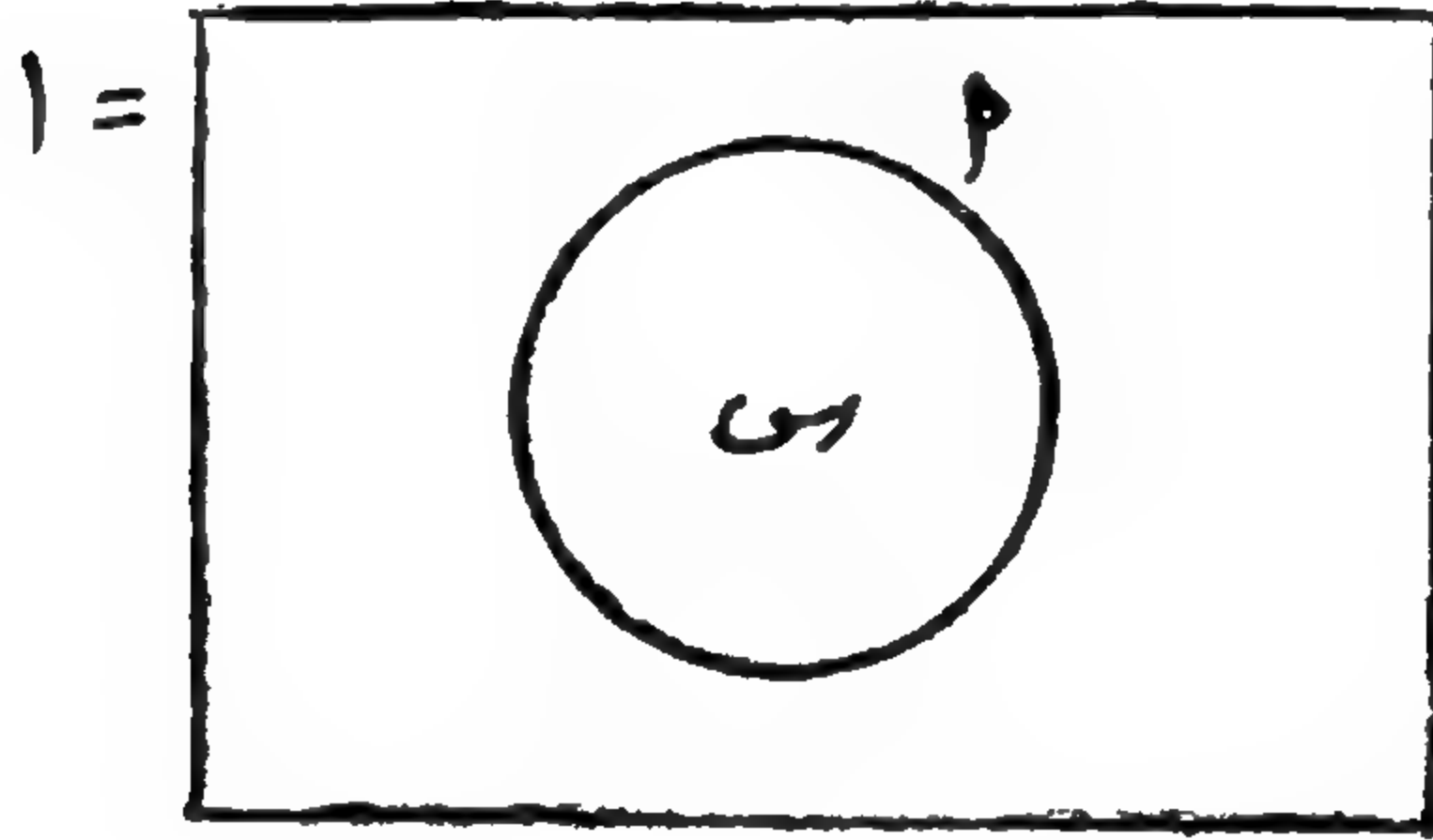
وهي القضايا التي تعبر ، لا عن كون الفئة ذات عضو واحد ، إنما تعبر عن اتناء عضو واحد مفرد إلى فئة معينة . وعادة ما يرمز لعلاقة عضوية فرد في فئة باستخدام الرمز « \in » ^(١) كما أننا عادة ما نستخدم رموزاً للتعبير عن الجزئيات المفردة تختلف عن رموز الفئات . وكما أننا نستخدم للفئات حروف الهجاء التي تبدأ من a مثل : a ، b ، c ، ... فإننا نستخدم للمفردات أو الأعضاء الجزئية الحروف m ، n ، ... وذلك أمر ضروري طالما أن حديثنا عن الفئات يكون على مستوى

(١) وهي في أصلها الحرف اليوناني Epsilon ويرجع الفضل في استخدام هذا الرمز إلى عالم اللغوي الإيطالي يانوف في مؤلفه الكبير « الصنع الرياضية » .

يختلف عن مستوى حديثنا عن الأعضاء للفردة التي يمكن أن تندرج تحت هذه الفئات (١) . وهكذا يمكن التعبير رمزياً عن اندراج عضو واحد مفرد في فئة ما ، على النحو الآتي :

س (\equiv) ١

ونقرأ : « س عضو في الفئة ١ » . ويمكن أن نعبر عن هذه القضية بالرسم التالي الذي يظهر « س » كأحد أعضاء الفئة ١ : —



شكل ١٦

ويلاحظ أننا لن نحتاج إلى رمز جديد للتعبير عن نفي العضوية للفردة ، مثلما احتجنا لرمز يعبر عن عدم الهوية (\neq) ، لأن نفي قولنا أن تكون « س » عضواً في الفئة ١ ، مرادف للقول بأن س عضو في الفئة المكملّة للفئة ١ ، أي $\bar{١}$. وعلى ذلك يكون نفي القضية (س (\equiv) ١) ، هو إثبات القضية :

س (\equiv) $\bar{١}$.

(١) والواقع أن مثل هذه التفرقة ضرورية في المنطق المعاصر لحل كثير من مشكلات المنطق بل والفلسفة التي تنتج عن الخلط بين مستويات وأنماط اللغة المختلفة . لارجع إلى نظرية الأنماط عند رسل وما يترتب عليها من نتائج .

١٠ — قضايا الفئة الشاملة والفئة الفارغة :

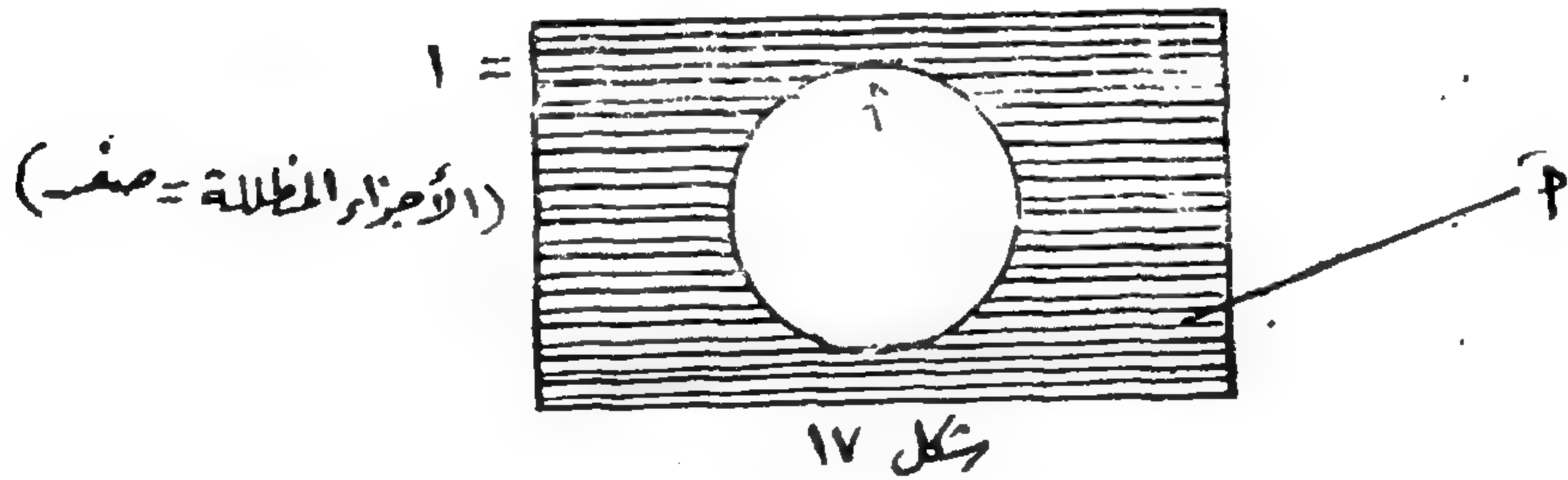
(١) قضايا الفئة الشاملة : The Universe Class propositions

لقد كان من الضروري — لتفسير طبيعة الفئة للكلمة لفئة ما — تقديم مفهوم عالم المقال ، أو الفئة الأوسع والأكثر شمولاً ، أو التي يمكن أن تكون شاملة لأي فئة مما يمكن أن تندرج تحتها .

والواقع أن عالم المقال تقسم فئة ، ويمكننا تسميته بالفئة الشاملة The Universe Class — وهو يناظر بطريقة غير دقيقة فكرة الجنس في التعريف الأرسطي — وقد أمكن التعبير عن هذه الفئة باستخدام مفهومى الفئة للكلمة والجمع كما يلي :

$$1 + 1 = 1$$

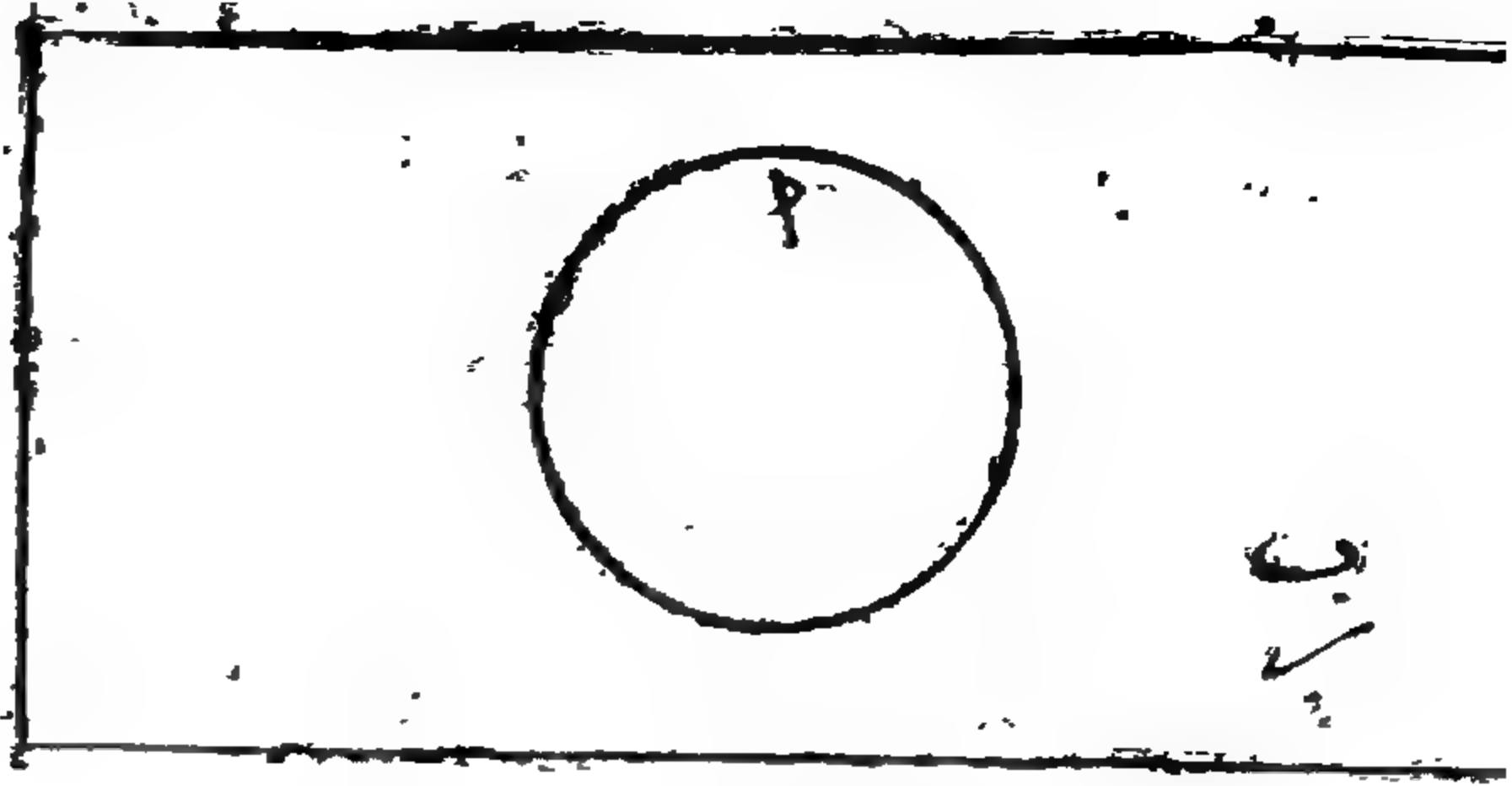
هذا ويلاحظ أن علاقة الهوية ١ أو عدم الهوية يمكن أن تنشأ بين الفئة الشاملة وبين أية فئة أخرى ، وذلك ما يتضح من الرسم التالى :



الذى يعبر عن الهوية بين الفئة ١ والفئة الشاملة ، أى أن : $1 = 1$.

أما فى حالة عدم الهوية بين ١ وبين الفئة الشاملة ، فإن الأجزاء المتبقية فى عالم للمقال (أى : \bar{A}) لن تكون مساوية للصفر ، بل تكون ذات أعضاء . فإذا ما رمزنا للفئة \bar{A} بالرمز \bar{P} ، استطعنا أن نرسم الشكل التالى :

(ب) : تنبئ أن الفئات الخاضعة



شكل ١٨

ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلي :-

$$1 \neq 0$$

$$1 \neq 1 \quad \text{كذلك}$$

$$1 = 0 + 1 \quad \text{هذا فضلا عن كون}$$

(ب) قضايا الفئة الفارغة أو الصفرية :

ذكرنا من قبل أن الفئة للكلمة للفئة الشاملة ، هي لفئة الفارغة ، من حيث أنها « فئة جميع الفئات التي لا أعضاء لها » . وعلى ذلك يمكن تعريف الفئة الفارغة (أو الصفرية) ، بواحدة من قضيتي الهوية التاليتين :-

$$(١) \quad \text{صفر} = \bar{1}$$

$$(٢) \quad \text{صفر} = 1 \times \bar{1}$$

إذ أن القضية الأولى تفيد أن الفئة الفارغة تتطابق ذاتياً مع الفئة للكلمة للفئة الشاملة أو أنها في هوية معها . وبما أن الفئة الشاملة تحتوي بالفعل على جميع الفئات ذات الأعضاء فإن الفئة الفارغة إذن تكون في هوية مع لا شيء ، أي الصفر .

والقضية الثانية (صفر = $1 \times \bar{1}$) تفيد أن الفئة الفارغة ، تتطابق ذاتياً مع

الفئة الناتجة عن حاصل ضرب أية فئة في الفئة المكمل لها . أو أنها في هوية معها .
لكن ما هو مشترك بين أية فئة ، والفئة المكمل لها ، هو لا شيء . لذا فإننا ننتهي
إلى نفس المعنى الذي حصلنا عليه من القضية الأولى .

هذا ويلاحظ أن باستطاعتنا التعبير عن قضايا الفئة الشاملة باستخدام قضايا
الفئة الفارغة ، وبالعكس ، طالما أن الفئتين الشاملة والفارغة تكملان إحداهما
الأخرى . فلورجنا إلى الأشكال السابقة ، لاحظنا أن $(1 = 1)$ مثلا يمكن
التعبير عنها بالقول :

$(1 = \text{صفر})$. [شكل ١٦] ، كما أن القضية $(1 \neq 1)$ يمكن التعبير عنها
بالقول $(1 \neq \text{صفر})$.

بعض القوانين الابتدائية الخاصة بحساب الفئات : (١)

لكي يمكننا إقامة الحساب التحليلي للفئات ، علينا أن نذكر أولا المبادئ
الأساسية والقوانين التي تحدد بوضوح طبيعة الإجراءات والعلاقات المتعلقة بالفئات
والتي تسهل علينا عمليات الاستدلال المختلفة . وفيما يلي أهم هذه القوانين (وقد سبق
أن أشرنا إلى بعضها أثناء العرض السابق) : —

١ — قانون الهوية Law of Identity

ويمكن التعبير عنه بأكثر من صيغة مثل : —

أولا : $1 \supset 1$ (٢)

(١) Cohen, M. & Nagel, E. : An Introduction to Logic. P. 123.

(٢) سوف نستخدم العلامة « \supset » في حساب الفئات للتعبير عن علاقة اندراج فئة في
فئة أخرى أو اشتراك فئة على فئة أخرى . فالقول : $1 \supset 1$ يعني أن الفئة ١ مندرجة تحت الفئة
ب أو متممة إليها ، وبالعكس فالقوة ب تكون شاملة لفئة ١ . وما هو جدير بالذكر أننا
سوف نستخدم هذه العلامة نفسها فيما بعد للدلالة على الزوم بين القضايا ، وذلك أثناء عرضنا
لحساب القضايا ، أو لقضايا الفئة .

أى أن أية فئة تكون مشتملة على ذاتها ، وتكون في الوقت نفسه متضمنة في ذاتها . وهو نفس القانون الذى سبق التعبير عنه من قبل كما يلي :

ثانياً : $1 = 1$.

٢ — قانون التناقض Law of Contradiction

ويسمى أحياناً باسم مبدأ عدم التناقض ، ويعبر عنه كما يلي : —

$$1 \times 1 = 0$$

ويقراً : لا يوجد عضو واحد مشترك بين الفئتين ١ ، ١ .

٣ — قانون الوسط للرفع :

وتمثل في التعبير : $1 + 1 = 1$

يعنى أن أى فرد نختاره من عالم اللقال سوف يكون متصفاً إما إلى الفئة ١ أو الفئة ١ .

٤ — قانون النفي للزدوج Law of Double Negation :

يعبر عنه بالصيغة التالية $1 = 1$

يعنى أن أية فئة تكون في هوية ، أو متطابقة ذاتياً مع الفئة المكملية ، لفئة المكملية لها هي نفسها . فلو كانت لدينا الفئة ١ ، كانت الفئة المكملية لها هي ١ ، وكانت الفئة المكملية لهذه الفئة الجديدة هي ١ .

٥ — قانون تحصيل الحاصل Law of Tautology :

وتمثل في : أولاً : $1 = 1 \times 1$

ثانياً : $1 = 1 + 1$

٦ - قانون التبادل Laws of Commutation :

أو قانون تبادل الحدود (١)، ويعبر عنهما كما يلي : —

أولاً : $a \times b = b \times a$ (في حالة ضرب المنطق)

ثانياً : $a + b = b + a$ (في حالة الجمع المنطقي)

ويمكن التعبير عن معنى التبادل بأن ترتيب المتغيرات — أو الرموز المعبرة عن الحدود أو الفئات — في حاصل ضرب أو جمع الفئات ، لا يؤثر على معناها .

٧ — قانون الترابط Laws of Association (٢)

ويعبر عنهما كما يلي : —

أولاً : $(a \times b) \times c = (b \times c) \times a = (c \times a) \times b$ في حالة ضرب .

ثانياً : $(a + b) + c = (b + c) + a = (c + a) + b$ في حالة الجمع .

وتقرأ أولاً : إن حاصل ضرب المنطق للفئة $a \times$ الفئة $(b \times c)$ ، يكون هو حاصل ضرب الفئة $b \times$ الفئة $(a \times c)$ ، ويكون هو حاصل ضرب الفئة $c \times$ الفئة $(a \times b)$.

(١) أو « التعميض » : المنطق الصوري والرياضي ، للدكتور محمد الرحمن بدوي ، صفحة ٢٩٤ .

(٢) ويعرف هذا القانون في الرياضيات باسم « قانون ترتيب الحدود » ، ويسميه الدكتور عبد الرحمن بدوي في كتابه سالف الذكر ، صفحة ٢٩٤ باسم « مبدأ التجميع » .



كما نقرأ ثانياً : إن حاصل الجمع المنطوق للفتة ١ والفتة (١ + ح) لا يمكن أن يكون هو حاصل جمع الفتة ب والفتة (١ + ح) ، ويكون هو حاصل جمع الفتتين ح ، (١ + ح) .

٨ — قانونا الاستغراق Laws of Distribution :

ويمكن التعبير عنهما على النحو الآتي : —

أولاً : $1 \times (a + b) = (1 \times a) + (1 \times b)$

ثانياً : $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

ويلاحظ أن القانون الأول الذي يجعل حاصل ضرب أتمل من حاصل الجمع ، قانون هادي من قوانين الجبر ، كما أنه يصلح للتطبيق بالنسبة للأعداد المماوية (١) في حين أن القانون الثاني الذي يجعل حاصل الجمع أتمل من حاصل الضرب ، لا يصدق في حالة الرياضيات ، وخاصة الحساب .

ولنأخذ لذلك المثال الآتي : لو كانت قيمة ا هي ٥ ، ب هي ٢ ، ح هي ٤ :

لنكن القانون الأول : $1 \times 5 + 2 \times 5 = (1 + 2) \times 5$

$5 + 10 = 6 \times 5$

$15 = 30$.

ولنكن القانون الثاني : $(1 + 5) \times 2 = (1 \times 2) + (5 \times 2)$

$6 \times 2 = 2 + 10$

$12 = 12$.

يتضح من هذا أن القانون الأول يصلح للتطبيق في حالة الرياضيات ، كما في حالة للنطق . في حين أن القانون الثاني ، وإن كان قانونا منطقيا خاصا بحساب الفئات إلا أنه لا يصلح للتطبيق في حالة الرياضيات .

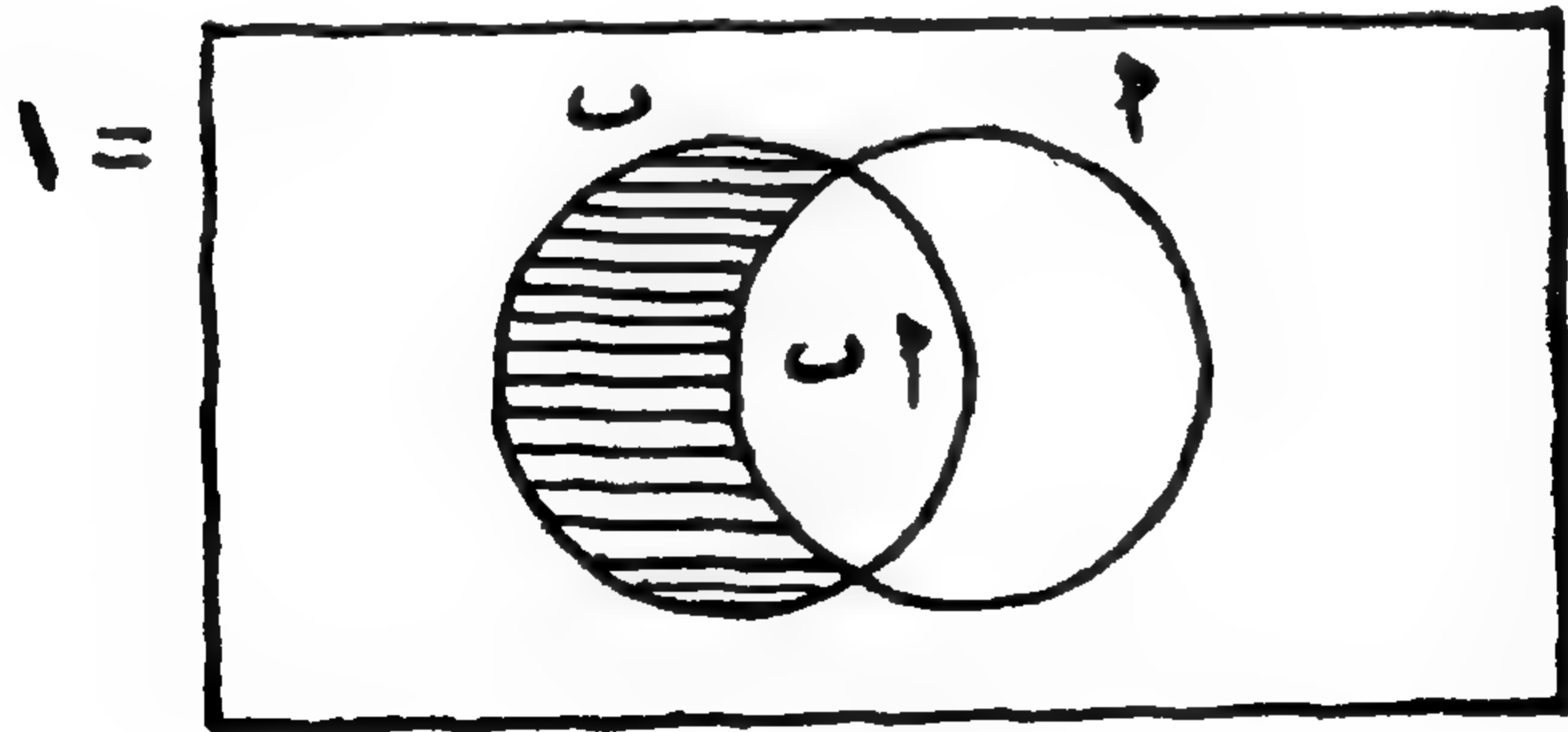
٩ — قانونا الامتصاص Laws of Absorption :

ويمكن التعبير عنهما كما يلي : —

أولا : $1 = 1 + 1$

ثانيا : $1 = (1 + 1)$.

ولتوضيح القانون الأول نفترض أن الرمز 1 يشير إلى فئة الطلبة ، والرمز 2 يشير إلى فئة المجتهدين ، ومن ثم تكون الفئة 12 هي فئة الطلبة المجتهدين ، وهي لا تمثل إلا جزءاً من الفئة 1 أي فئة الطلبة . ولذا فالقول بالفئة التي تتكون إما من الطلبة أو من الطلبة المجتهدين لا يزيد عن قولنا بفئة الطلبة . ولعل هذا ما يتضح من الرسم التالي :



شكل ١٩

أما القانون الثاني فتتضح صحته بفك الأقواس الخاصة بالشطر الأيمن من للمعادلة وذلك كما يلي :

$$\therefore (b \times 1) + (1 \times 1) = (b + 1) \times 1$$

$$\therefore 1 \times 1 = 1 \quad \text{بناءً على قانون الهوية}$$

$$\therefore b + 1 = (b + 1) \times 1$$

وبوضع : $b + 1$ مكان $(b + 1)$ في القانون الثانى نحصل على :
 $b + 1 = b + 1$ وهو القانون الأول الذى أوضحنا صحته .

١٠ — قانون التبسيط Laws of Simplification :

ويمكن التعبير عنهما على النحو الآتى :

$$\text{أولاً : } b \supset 1$$

$$\text{ثانياً : } b + 1 \supset b$$

فلو قلنا — بالنسبة للقانون الأول — أن تشير إلى فئة الطلبة ، b تشير إلى فئة المجتهدين ، كانت b تشير إلى فئة الطلبة المجتهدين . واستطعنا أن نقرأ العبارة كما يلي :

« الطالب المجتهد طالب » . ولكان معنى هذا :

١ — إما أن فئة الطلبة المجتهدين جزء من فئة الطلبة ، فيكون بعض الطلبة مجتهدين وبعضهم الآخر غير مجتهد ومن ثم تكون :

$$b + b = b$$

ويلزم عن هذا التعبير كل من الصيغتين التاليتين :

$$b \supset b$$

$$b \supset 1$$

٣- ولما أن تكون فئة الطلبة المجتهدين هي نفسها فئة الطلبة ، وبالتالي لا يكون هناك طالب واحد غير مجتهد . وعلى ذلك تكون :

$$a = b$$

فلذا طبقنا على ذلك التفسير القائل بأن : $a = b$ تكافئ القول $a \supset b$ ،

لحصلنا على : $a \supset b$.

أما فيما يتعلق بالقانون الثاني : $a \supset b + a$ فمن الواضح أنه صحيح ، طالما أن الفئة a ، هي إحدى مكونات الفئة $(a + b)$ ، وعلى ذلك تكون متضمنة فيها أو متدرجة تحتها . كأن أقول إن فئة الطلبة (a) متضمنة في الفئة المكونة من إما طلبة أو طالبات $(a + b)$ أو هي تنتمي إليها .

بعض النتائج المترتبة على القانونين السابقين :

أولاً : استكمالاً للقانون الثاني ، يمكننا أن نستنتج النتيجة الطبيعية التالية :

$$b \supset a + b$$

ويمكن البرهنة على صحة هذه الصيغة بنفس الطريقة التي استخدمناها للبرهنة على

الصيغة السابقة : $a \supset b + a$.

ثانياً : أن : $a \supset 0$.

وتقرأ : أن الفئة الفارغة أو الصفرية متضمنة في أية فئة .

ثالثاً : $a \supset a$.

وتقرأ : أن أية فئة تمثل أو تكون متضمنة في عالم للقال أو الواحد

الصحيح . وللبرهنة على ذلك لن نحتاج إلى أكثر من أن نفترض :

(١) أن : $b = \text{صفر}$ في القانون الأول .

(٢) أن : $b = ١$ في القانون الثاني . (١)

— في القانون الأول وهو $(a \supset b)$ ، لو كانت $b = \text{صفر}$ لحصلنا على :

$$١ \times \text{صفر} \supset ١$$

$$\text{وبما أن } ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} \supset ١$$

— وفي القانون الثاني وهو $(a \supset b + ١)$ ، لو كانت $b = ١$ لحصلنا على :

$$١ + ١ \supset ١$$

$$\text{وبما أن } ١ + ١ = ١$$

$$\therefore ١ \supset ١$$

كما يمكن البرهنة على صحة هذه النتيجة الثانية ، وهي $(١ \supset ١)$ ، طالما أن عالم المقال يكون دائماً مكوناً من حاصل جمع أية فئة مناسبة والفئة للكلمة لها ، أى أن :

$$\cdot (1 + 1 = 1)$$

$$\therefore ١ \supset ١ \cdot$$

رابعاً : كما يمكننا أن نستنتج في هذه الحالة أيضاً أن :

$$١ \supset ١'$$

طالما كانت الصيغة $(١ \supset ١)$ صحيحة .

(١) Cohen. M. & Magel, E. : An Introduction to Logic, P. 124

(م ٥ - أسس المنطق الرمزي)

١١ — قانون التركيب Law of Composition

ويمكن التعبير عنه كما يلي :

أولاً : $[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d$

ثانياً : $[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d$

$(a + b) \cdot c$ ^(١)

(١) للرجع السابق ، للوضع نفسه . هذا ويلاحظ أننا قد استخدمنا هنا الرمز « \cdot » أربع مرات في كل واحد من القانونين السابقين ، ثلاث مرات منها للدلالة على التضمن بين الفئات مثل « $(a \cdot b)$ » ، « $(a \cdot b \cdot c)$ » في كل من القانونين ، ومثل « $(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ » في القانون الأول ، « $(a + b) \cdot c$ » « $(a + b) \cdot c$ » في القانون الثاني . كما استخدمناه مرة أخرى في كل من القانونين للدلالة على اللزوم بين القضايا ، بمعنى أن كل التعبير الذي يتلوه في هذه الحالة يلزم عن كل التعبير الذي يسبقه . وللنفرة بين معنى الرمز « \cdot » الدال على التضمن بين الفئات والرمز نفسه من حيث هو دال على اللزوم بين القضايا ، فإننا غالباً ما نضع كل التعبير السابق عليه بين قوسين مربعين « $...$ » ، وكذا كل التعبير التالي له ، في حالة اللزوم بين القضايا . وقد يمكن التمييز بين المعنيين بعلامة أخرى مثل : « \cdot » أو « \cdot » التي تستخدم في حالة اللزوم بين القضايا . ولذا يمكن كتابة القانونين السابقين على نحو آخر كما يلي :

أولاً : $(a \cdot b) \cdot c \cdot d$

أو : $a \cdot b \cdot c \cdot d$

ثانياً : $(a \cdot b) \cdot c \cdot d$

أو : $a \cdot b \cdot c \cdot d$

ويلاحظ أننا نستخدم النقطة « \cdot » في القانونين السابقين للقول بالتعريف السابق عليها واللاحق لها معاً . وتعبّر النقطة في هذه الحالة عن إجراء الضرب المنطقي بين القضايا ، وتناظر في هذا الصدد العلامة « \times » التي تفيد إجراء الضرب المنطقي =

ويقـرأ التعبير الأول كما يلي : لو كانت الفئة | متضمنة في الفئة ب ، وكانت كذلك الفئة ح متضمنة في الفئة و ، للزم عن هذا كله أن تكون الفئة | ح متضمنة في الفئة ب و .

ويقـرأ التعبير الثاني كما يلي : لو كانت الفئة | متضمنة في الفئة ب ، وكانت كذلك الفئة ح متضمنة في الفئة و ، للزم عن ذلك كله أن تكون الفئة (ا + ح) متضمنة في الفئة (ب + و) .

ولنأخذ مثلاً يوضح القانون الأول ، فلو كانت | تشير إلى فئة الرسامين ، ب إلى فئة الفنانين ، و ح إلى فئة المجددين ، و إلى فئة المجتهدين ، لكان معنى القانون الأول هو :

إن القول بأن الرسام فنان ، وبأن المجدد مجتهد ، يستلزم القول بأن الرسام المجدد هو فنان مجتهد .

١٢ — قانون القياس Law of Syllogism

ويمكن التعبير عنه على النحو الآتي : —

$$[(ا \supset ب) \cdot (ب \supset ح)] \supset (ا \supset ح) .$$

ويقـرأ : إن القول بأن الفئة | متضمنة في الفئة ب ، وأن الفئة ب متضمنة في الفئة ح ، يستلزم القول بأن الفئة | متضمنة في الفئة ح . فلو كانت | تشير إلى فئة الإنسان ، ب إلى فئة الحيوان ، ح إلى فئة الكائنات الحية ، لكانت العبارة التالية صحيحة : لو كان الإنسان حيواناً ، وكان الحيوان كائناً حياً ، فإنه يلزم عن ذلك أن يكون الإنسان كائناً حياً .

= بين الفئات . وسنعود إلى توضيح استخدام هذه العلامات والرموز فيما بعد أثناء عرضنا للحساب التحليلي للقضايا .

١٣ — قانونا دي مورجن^(١)

هذان القانونان يسمحان لنا دائماً بالتعبير عن حاصل ضرب الفئات بواسطة إجراء الجمع ، والمكس صحيح ، أى التعبير عن حاصل جمع الفئات بواسطة إجراء الضرب . ويمكن التعبير عن القانونين كما يلي :

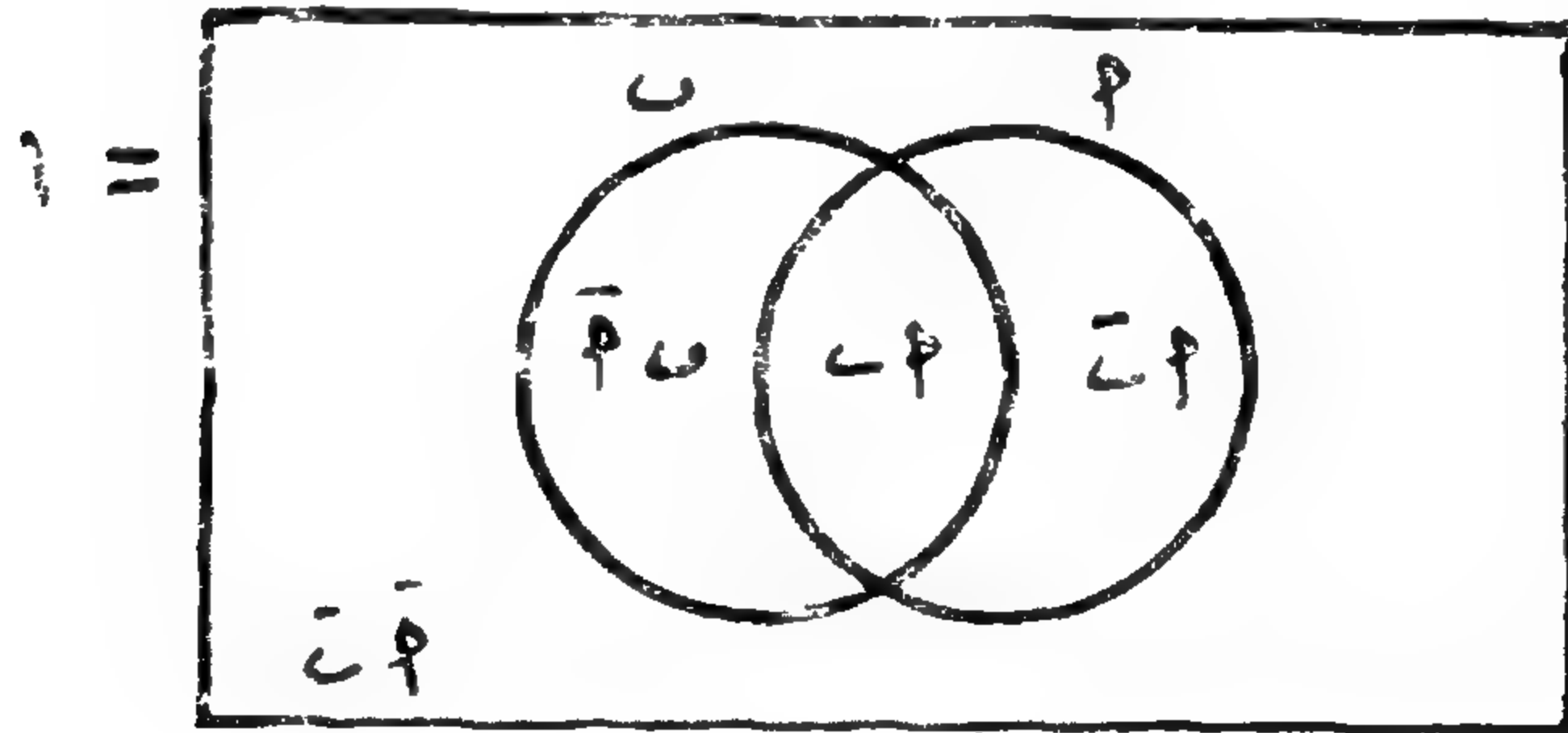
$$\text{أولاً : } \overline{b + a} = \overline{b} \times \overline{a}$$

$$\text{ثانياً : } \overline{b \times a} = \overline{b} + \overline{a}$$

أى أن الفئة المكملّة لحاصل ضرب فئتين ، تكون هى هى الفئة الناتجة عن حاصل جمع الفئتين للمكملتين للفئتين الأصليتين .

كما أن الفئة المكملّة لحاصل جمع فئتين ، تكون هى هى الفئة الناتجة عن حاصل ضرب الفئتين المكملتين للفئتين الأصليتين .

والبواقع أن قانونى دي مورجن يتماثلان بشكل فن وما يترتب عليه من نتائج ، ويمكن توضيح ذلك لو أخذنا أهم نتائج شكل فن ، وذلك كما يلي : —



شكل ٢٠

(١) نسبة إلى عالم الرياضيّة واللغويّ الإنجليزي أوجستس دي مورجن Augustus De Morgan (١٨٠٦ — ١٨٧١) الذى شغل منصب أستاذ الرياضيات بجامعة لندن فيما بين عامي ١٨٢٨، ١٨٦٦ ، واشتهر فى المنطق الرياضى =

أولاً : ١ = ١ + ٠ + ٠ + ٠ + ٠ .

ويمكن البرهنة على صحة هذه الصيغة على النحو الآتي :

١.٠ = ١ + ٠ (قانون الوسط المرفوع)

١.٠ = ٠ + ٠ » » »

١.٠ = ١ × ١ (قانون تحصيل الحاصل)

١.٠ = (١ + ٠) × (٠ + ٠)

= ٠ + ٠ + ٠ + ٠

= ٠ + ٠ + ٠ + ٠ (قانون ترتيب الحدود)

ثانياً : ١ + ٠ = ٠ + ١ + ٠ + ٠

يمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلي :

١ = ٠ + ١

٠ = ٠ + ١

١.٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ٠

= ٠ + ٠ + ٠ + ٠

وبما أن ١ = ٠ + ١ (بناء على قانون الهوية)

١.٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ٠

ثالثاً : ١ = ٠ + ٠ + ٠

ويمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلي :

١.٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ (في أولاً) (١)

١.٠ = ٠ + ٠ + ٠ (في ثانياً) (٢)

= بهذين القانونين المتعلقين بجبر المنطق . وأهم مؤلفاته كتاب « المنطق الصوري

أو الحساب التحليلي للاستدلال » عام ١٨٧٤ .

∴ باستخدام قاعدة الاستبدال - (التي تسمح لنا بأن نضع بدلاً من أى متغير من متغيرات الفئة ، متغيراً آخر يشير إلى فئة ترتبط بملاقة الهوية مع الفئة الأولى ، وبدون أن يترتب على ذلك تغير صدق أو كذب أية قضية ترد فيها هذه المتغيرات) -
يمكن أن نضع ($1 + b$) في العبارة رقم (١) بدلاً مما يساويها ، أى ($1 + \bar{b}$)
 $b + (1 + \bar{b})$ ، فنحصل على : $1 = 1 + b + \bar{b}$.

رابعاً : $\bar{b} = \overline{(1 + b)}$

وللبرهنة على ذلك نقول :

$$- . 1 + 1 = 1$$

∴ كل فئة ونقيها تكملان إحداها الأخرى ، وتؤلّفان معاً عالم المقال .
وبالعكس فالواحد الصحيح يتكون من أية فئة ، ونقيها ، أو الفئة
للإكتمال لها .

— بتطبيق ذلك على النتيجة الثالثة من نتائج شكل فن وهى : $1 + b = \bar{b}$
 $1 + \bar{b}$ ينتج أن كلا من الفئتين المجموعتين ، تكمل إحداها الأخرى ،
أى تنفى إحداها الأخرى وعلى ذلك ينتج أن :

$$1 - (1 + b) = \bar{b} \quad \text{وهو المطلوب}$$

ويلاحظ أن النتيجة التى وصلنا إليها الآن هى القانون الثانى من قانونى
دى مورجن .

$$2 - \text{وأن : } 1 + b = \overline{(\bar{b})} .$$

هذا وغالباً ما يرد قانونا دى مورجن لفئات فى كثير من الكتب المنطقية
باسم مبرهنة دى مورجن De Morgan's Theorem ، أو نظرية دى مورجن

للمبرهنة . وتكون المبرهنة في هذه الحالة من شقين :

١ — الشق الأول ويعبر عنه بالقول : إن سالب حاصل ضرب أى فئتين يساوى حاصل جمع سالب الفئتين .

٢ — الشق الثانى ويعبر عنه بالقول : إن سالب حاصل جمع أى فئتين يساوى حاصل ضرب سالب الفئتين .

ويمكن التدليل على صحة هذه المبرهنة بشقيها على النحو الآتى : —

البرهان على الشق الأول ، أى على صحة : $(\overline{ab}) = \overline{a} + \overline{b}$

$$- \therefore \overline{ab} + a + \overline{a} + b = 1$$

(النتيجة الأولى لشكل فن)

$$\therefore \overline{ab} + \overline{a} + a + \overline{b} = 1$$

(بتطبيق مبدأ ترتيب الحدود)

$$\therefore (\overline{ab} + \overline{a} + a + \overline{b})$$

المقال لأن مجموعهما يساوى الواحد الصحيح ، وطالما أنهما

متخارجتان بمعنى أن حاصل ضربهما = صفر وبالتالي فإن أياً منهما

تكون تقياً للأخرى .

$$- \text{ولكن } \overline{ab} + \overline{a} + a + \overline{b} = \overline{a} + \overline{b} + a + \overline{a}$$

(بتطبيق قانون تحصيل الحاصل)

$$= (\overline{a} + \overline{b}) + (a + \overline{a})$$

$$= \overline{b} + (\overline{a} + a)$$

(بتطبيق قانون الاستغراق)

وبما أن $1 = (A + A)$ ، وبما أن $1 = (B + B)$ (قانون الوسط المرفوع)

$$\therefore 1 \times A + 1 \times B = A + A + B + B$$

$$A + B =$$

$$A + B =$$

\therefore فإن $(A + B)$ تنفي (AB) ، كما أن (AB) تنفي $(A + B)$.

$\therefore (A + B) = \overline{(AB)}$ وهو المطلوب ^(١)

(١) Cohen, M. & Nagel. E. : An Introduction to Logic, P. 125.

هذا ويمكن البرهنة بطريقة أخرى على هذه النتيجة ، وذلك كما يلي : —

$$\therefore A = A + A + B + B$$

$$6 \therefore B = A + A + B + B$$

$$\therefore A + B = A + A + B + B + A + B$$

$$= (A + B) + (A + B) + (A + B)$$

$$\text{وبما أن } A + B = A + B + A + B$$

$$\therefore A + B = A + B + A + B + A + B$$

$$\text{وبما أن } 1 = A + B + A + B + A + B$$

(النتيجة الأولى من نتائج شكل فن)

$$\therefore 1 = A + B + A + B \quad (\text{ بتطبيق قانون الاستبدال })$$

$\therefore A + B$ تنفي AB ، وبالعكس . أى أن كلا من الفئتين تنفي الفئـة الأخرى .

$$\therefore (A + B) = \overline{(AB)} \text{ وهو المطلوب .}$$

البرهان على الشق الثاني ، أى على صحة : $\overline{A} = (A + 1)$

$$- \therefore \overline{A} + A + \overline{A} + A = 1$$

(النتيجة الأولى من نتائج شكل فن)

\therefore كل من الفئتين $(A + \overline{A})$ ، (\overline{A})

تتفق إحداها الأخرى (بناء على قانون الوسط المرفوع) .

$$- \text{ لكن } A + \overline{A} + A + \overline{A} = A + \overline{A} + A + \overline{A}$$

(بتطبيق قانون تحصيل الحاصل)

$$= (A + \overline{A}) + (A + \overline{A})$$

$$= (1 + 1) + (1 + 1)$$

(بتطبيق قانون الاستغراق)

$$\text{وبما أن } (A + \overline{A}) = 1 \text{ وبما أن } (1 + 1) = 1$$

(قانون الوسط المرفوع)

$$\therefore \overline{A} + A + \overline{A} + A = 1 \times 1 + 1 \times 1$$

$$= 1 + 1$$

\therefore فإن $(A + 1)$ تتفق (\overline{A}) ، كما أن (\overline{A}) تتفق $(A + 1)$

$$\therefore \overline{A} = (A + 1) \text{ وهو المطلوب. }^{(1)}$$

(١) Cohen, M. & Nagel, E. : An Introduction to Logic, P. 125

كما يمكن البرهنة على هذه النتيجة بطريقة أخرى ، من حيث هي النتيجة الرابعة من نتائج شكل فن ، وذلك ما أوردناه بالتفصيل من قبل ، ويتلخص في الآتي :

$$\therefore \overline{A} + A + \overline{A} + A = 1$$

(النتيجة الأولى من شكل فن)

$$6 \therefore 1 + 1 = \overline{A} + A + \overline{A} + A \text{ (الثانية د د د)}$$

هذا ويلاحظ أننا نستطيع تعميم هذه النتائج بالنسبة لأي عدد محدود أو متناه من الفئات .

ويمكننا أن نعبر عن ذلك كما يلي :-

$$(١) \quad \overline{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \overline{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

$$(٢) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{\overline{1 + 2 + 3 + \dots + n}}$$

بعض أنواع قضايا الفئات :

يمكن تصنيف قضايا الفئات من أكثر من زاوية مثل :-

أولاً : من حيث الصدق Truth أو الكذب ، والصحة Validity أو عدم الصحة . وأما لفرق بين القضية الصادقة والقضية الصحيحة . حقاً أن كلمة « صحة » Validity عادة ما تستخدم لوصف الاستدلال أو البرهان ، فنقول « استدلال صحيح » أو « برهان صحيح » . كما أن الصدق والكذب من الصفات التي توصف بها القضية ، لكننا نريد في الواقع أن نفرق بين نوعين من القضايا :

$$١ - \text{قضايا مثل : } (1 + 1 = 1) .$$

$$٢ - \text{قضايا مثل : } (1 = 1) .$$

فنلاحظ أن القضايا التي تكون من النوع الأول ، لا يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على نفس النحو الذي نعبر به عن $(1 = 1)$ أو $(1 \neq 1)$. إذ أننا

$$= \therefore 1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{1 + 2 + 3 + \dots + n} \quad (\text{النتيجة الثالثة من شكل فن})$$

\therefore فكل من الفئتين $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ ، $(\overline{1 + 2 + 3 + \dots + n})$ تنفي إحداهما الأخرى .

$$\therefore \overline{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \overline{\overline{1 + 2 + 3 + \dots + n}} \text{ وهو المطلوب .}$$

نستخدم في الأشكال الخاصة بهاتين القضيتين الأخيرتين إما طريقة تظليل الفئة المحذوفة أو الفارغة ، أو طريقة وضع العلامة « $\sqrt{}$ » بالنسبة للفئة ذات الأعضاء . لكن لا هذا الإجراء ولا ذلك يصلح للتعبير عما تثبته القضية ($1 = 1 + \bar{1}$) ، وذلك لأن هذا النوع من القضايا لا يمكن تكذيبه مهما كانت حالة العضوية الفعلية في الفئة $\bar{1}$ أو الفئة 1 . ولتوضيح ذلك نقرض أننا رسمنا مربعاً لعالم المقال ثم رسمنا فيه دائرة تمثل فئة فرعية من الفئات المدرجة تحت عالم المقال ، نلاحظ في هذه الحالة أننا لا نستطيع إلا الاعتراف بأن ما هو داخل الدائرة وما هو خارجها — أى الفئة والفئة المكمل لها ، يستنفذان معاً عالم المقال ، أى أنهما معاً تساويان الواحد الصحيح .

∴ فالقضية ($1 = 1 + \bar{1}$) صادقة بالضرورة ، أو هي بما لا يمكن تكذيبه ولذا تسمى القضايا الشبيهة بهذه القضية ، بالقضايا الصحيحة Valid أو القضايا المعبرة عن تحصيل الحاصل Tautological^(١) . بمعنى أنه مهما كانت القيم التي توضع بدلا من المتغيرات ، فإن القضية تكون صادقة دائماً . وهكذا فالصحة نوع خاص من الصدق ولا يفتى إلا إلى القضايا التي يكون الصدق فيها بما يمكن تأكيده بمجرد معرفة ما تعنيه القضية . أما القضايا الشبيهة بالقضية ($1 = 1$) ، فهي ليست صادقة صدقاً ضرورياً ، بل هو صدق ممكن فقط . أى أن صدق مثل هذه القضية لا يمكن تحديده من مجرد معرفة معنى القضية ، بل يجب أن يتحدد بطريقة أخرى ، مثل مطابقتها للواقع لكي نتبين أن الفئة 1 هي الفئة الشاملة فعلا أم لا ، وهو أمر قد ينتهي بنا إلى إمكان صدق القضية أو كذبها .

نلخص ما سبق فنقول أن القضية الصحيحة ، هي القضية الصادقة بالضرورة ،

(١) Schipper, E. & Schuh, E.: A First Course in Modern Logic, P 276.

ويكون صدقها لا زماً عن صورتها وطريقة تركيبها فقط ، بغض النظر عن مطابقتها للواقع أو عن عضويتها الفعلية . أما القضية الصادقة True ، فهي تلك التي لا يرجع الصدق فيها إلى صورتها أو معناها فقط ، بل إلى تحقيقها ، ولذا فالصدق فيها صدق ممكن فقط وليس صدقاً ضرورياً .

ومن أمثلة القضايا الصحيحة (بهذا المعنى) : (١)

$$١ - ١ = ١ \quad \text{أو} \quad ١ + ١ = ٢$$

$$٢ - ١ = ١$$

$$٣ - ٢ = ١$$

$$٤ - ٣ = ١$$

$$٥ - ٤ = ١$$

ومن أمثلة القضايا الصادقة (بالمعنى سالف الذكر ، أى للممكنة الصدق والكذب) :

$$١ - ١ = ١ \quad \text{أو} \quad ١ = ١$$

$$٢ - ١ = ١$$

$$٣ - ٢ = ١$$

$$٤ - ٣ = ١$$

$$٥ - ٤ = ١$$

ثانياً : من حيث البساطة والتركيب : وتنقسم قضايا الفئات إلى نوعين أساسيين .

١ - قضايا بسيطة Simple ، وهي تلك التي لا تحتوى أية قضية منها إلا على

متغير مفرد لفئة ما مثل :

$$١ - ١ = ١ \text{ صفر}$$

$$٢ - ١ \neq ١ \text{ صفر}$$

$$٣ - ١ \equiv ١ \text{ س}$$

$$٤ - ١ \equiv ١ \text{ س} \dots \text{ وغير ذلك .}$$

٢ - قضايا مركبة Compound ، وهى تلك التى تحتوى على حاصل ضرب

أو جمع عدة فئات مثل :-

$$١ - ١ = ١ \text{ صفر}$$

$$٢ - ١ + ١ \neq ١ \text{ صفر}$$

$$٣ - ١ \equiv ١ \text{ س}$$

$$٤ - ١ + ١ \equiv ١ \text{ س} \dots \text{ وغير ذلك}$$

هذا ويمكن استخدام قضايا الفئات ، من حيث هى وحدات بسيطة يمكن تطبيق عدد من الإجراءات المنطقية إزاءها مثل المطف ، فيمكن على سبيل المثال عطف قضيتين أو أكثر من قضايا الفئات ، بسيطتين أو مركبتين ، أو إحداهما بسيطة والأخرى مركبة ، فنحصل بذلك على قضية عطفية مثل :

$$١ - (١ = ١ \text{ صفر} \cdot ١ \neq ١ \text{ صفر}) ، \text{ وتقرأ : أن } ١ \text{ فئة فارغة ، وأن } ١$$

فئة ذات ما صدقات وليست فارغة . وهذا يعنى أن كلا القضيتين

المعطوفتين (١ = ١ صفر) ، (١ ≠ ١ صفر) صادقتان معاً .

$$٢ - ١ \equiv ١ \cdot ١ = ١ \text{ صفر} .$$

$$٣ - (١ = ١ \text{ صفر} \cdot ١ = ١ \text{ صفر} \neq ١ \text{ صفر}) \dots \text{ وغير ذلك .}$$

هذا ويجب ألا نخلط بين هذا النوع الأخير من القضايا الخاص بالفئات — أى

القضايا العطفية - وبين الفئات العطفية *Conjunctive Classes* فالفئة العطفية هي حاصل عطف (أو ضرب) فئتين أو أكثر، مثل « ا ب » أو « ا ب ح » في حين أن علينا تفسير القضية العطفية على أنها عطف قضيتين (من قضايا الفئات في الحالة التي تتكلم عنها) أو أكثر . وسنعود إلى مثل هذا الإجراء وغيره بين القضايا بالتفصيل ، في الجزء الخاص بالحساب التحليلي للقضايا .

ثالثا : قضايا الفئات من حيث السكم :

وتقسم إلى : قضايا كلية ، وقضايا جزئية ، وقضايا مفردة .

١ - القضايا الكلية : *Universal* والقضية الكلية - في منطق الفئات هي تلك التي تثبت أن فئة ما ، بسيطة أو مركبة ، تساوي الفئة الصفرية ، أو بمعنى آخر أنها فئة فارغة . فالقضية البسيطة التالية مثلا : (١ = صفر) ، والقضية المركبة التالية (ا ب = صفر) ، كلاهما يثبت شيئا عن الفئة بأكلها سواء كانت ا أو ب ، وأنها مساوية للصفر . ومن ثم فكل قضية منهما هي قضية كلية .

ب - القضايا الجزئية : *Particular* ، وهي على عكس النوع السابق ، لا تثبت إلا أن فئة ما هي فئة ذات أعضاء ، ويكون الإثبات في هذه الحالة منصرفا إلى بعض هذه الأعضاء دون تحديد لها . ومن ثم فلا تكون هذه الفئة متطابقة ذاتيا مع الفئة الفارغة أو في هوية معها . وسواء كانت الفئة محتوية على عضو واحد فقط ، أو على كثير من الأعضاء ، فالقضية التي تثبت ذلك وتقرره تكون قضية جزئية ، طالما أنها لا تتكلم عن كل الأعضاء في الفئة . ولناخذ مثلا لذلك القضيتين التاليتين :

$$١ - ١ \neq \text{صفر}$$

$$٢ - ا ب \neq \text{صفر}$$

فلاحظ أن كلا من الفئتين ١ ، ا ب هي فئة ذات أعضاء طالما أنها لا تساوي
الفئة الفارغة .

ح — أما القضايا المفردة : Singular ، فتجمع بين خصائص النوعين
السابقين من القضايا الكلية والجزئية . وهذا ما يتضح مثلاً من القضية التالية : —

س (=) ا

التي ثبت وتقرر أن « س » كلها ، عضو في الفئة ا ، وأن الفئة ا ، هي في
الوقت نفسه فئة ذات أعضاء . ولذا عادة ما يقال عن أمثال هذه القضية — أى
القضية المفردة — أنها من نوع مختلف ، فهي ليست بالقضية الكلية ، كما أنها ليست
بالقضية الجزئية ، بل هي هما معاً .

وستناول فيما يلي شيء من التفصيل ما أوجزناه :

١ — القضايا الكلية :

يمكن تصنيفها إلى قضايا موجبة أو سالبة أو استيعادية ، وذلك كما يلي : —

١ — القضايا الكلية الموجبة Universal Affirmative Propositions

وصورتها العامة تقليدياً هي :

كل ا هي ب .

وتعني هذه الصيغة أن الفئة ا متضمنة في الفئة ب . وهذا يعني بدوره عدم وجود
أى عضو في الفئة ا إلا ويكون كذلك متصفاً بكونه ب . وبعبارة أخرى تكون
الفئة ا ، الخارجة عن ب فئة فارغة أو مساوية للصفر .

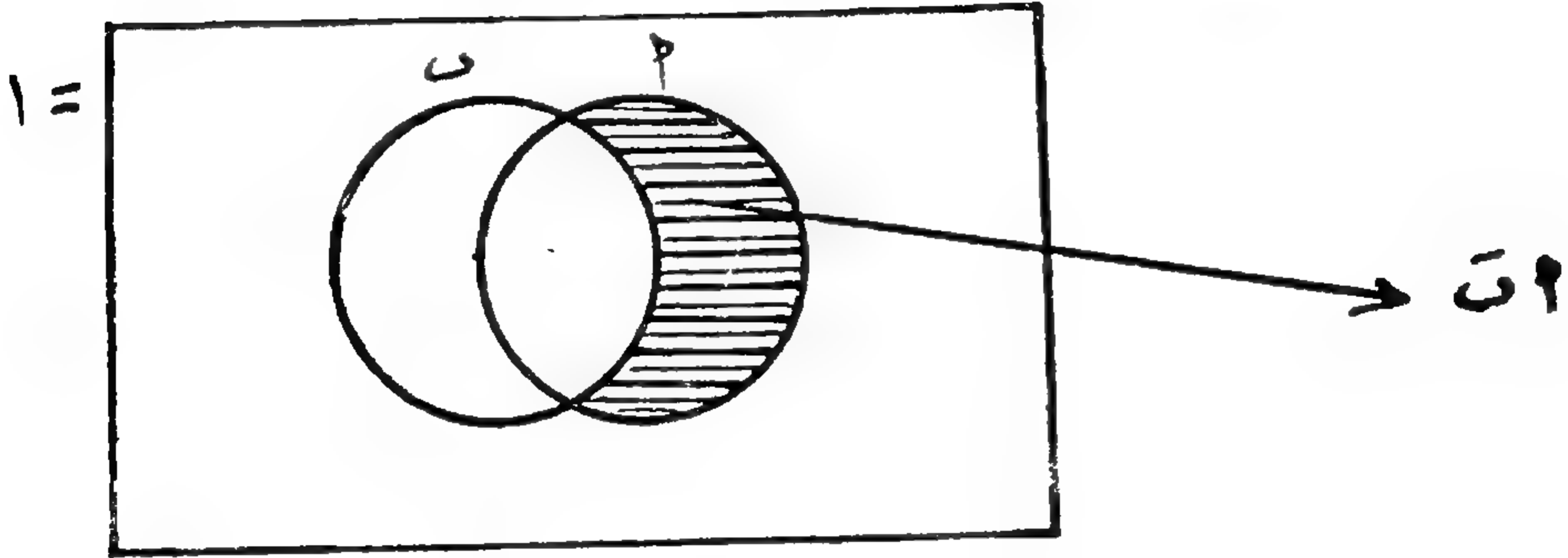
ولذا يمكن التعبير رمزياً عن القضايا التي تفيد التضمن بين الفئات

Class - inclusion Propositions - (في هذه الحالة بين الفئتين ا ، ب) -

على النحو الآتي :

$$a = \bar{b}$$

ويمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتي :



شكل ٢١

٢ - القضايا الكلية السالبة

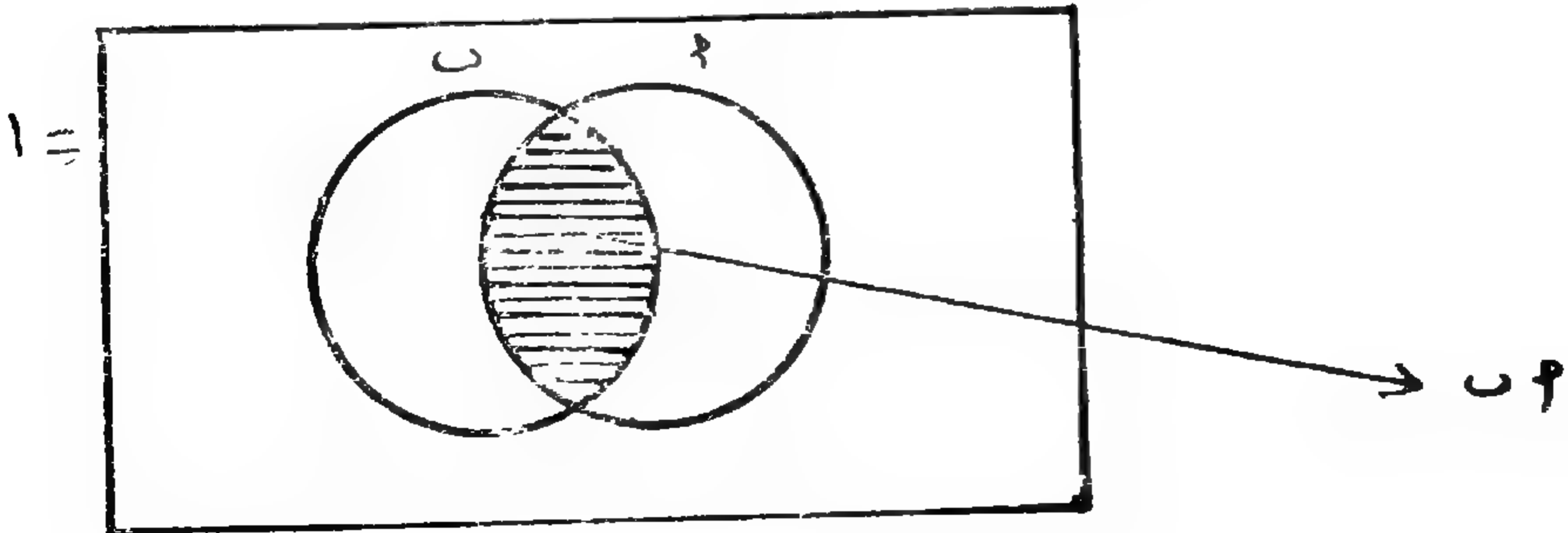
وتتمثل صورتها العامة - تقليديا - في الصيغة التالية :

« لا ا هي ب »

وهو قول يثبت أن الفئة المشتركة بين الفئتين ا ، ب ، فئة فارغة . ولذا يمكننا التعبير رمزيا عن هذه القضية كما يلي :

$$a = \bar{b}$$

كما يمكننا التعبير عنها بالرسم على النحو الآتي :



شكل ٢٢

٣ — القضايا الاستيعادية Exclusive Propositions

مثل : (فقط ا هي ب) (١)

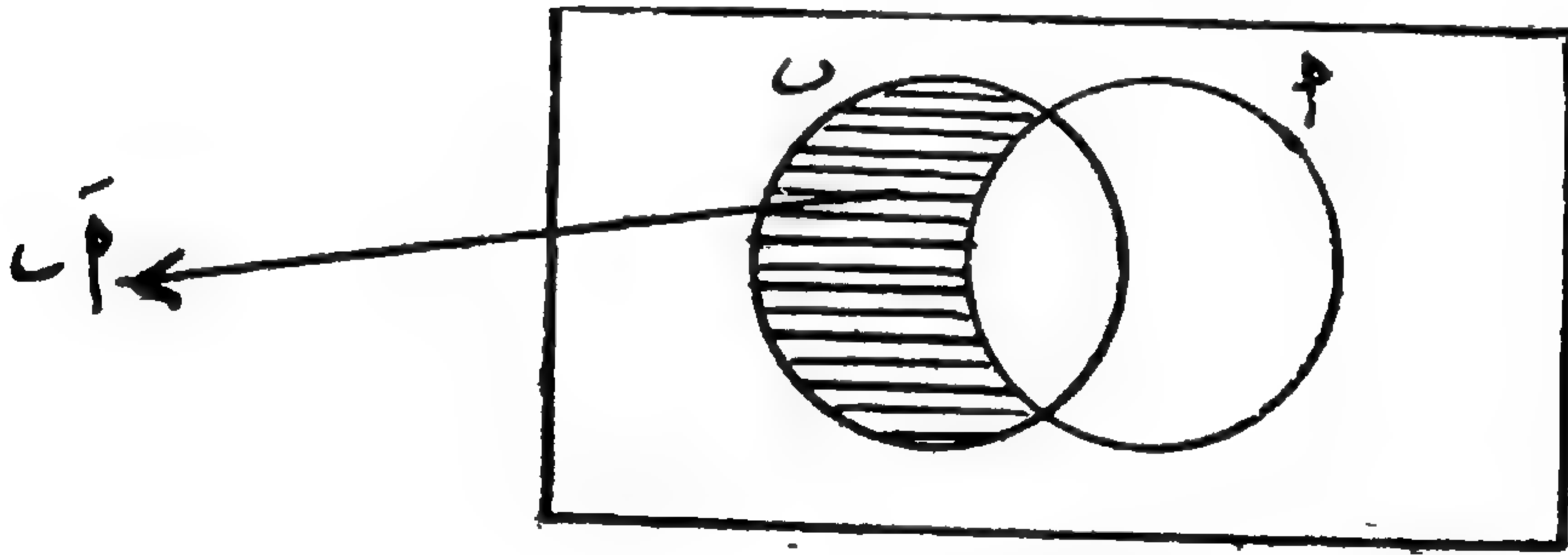
وتقرأ : (لا شيء من بين من ليس عضواً في الفئة ا ، هو عضو في الفئة ب) ،
ويمكننا أن نعبر عنها رمزياً ، كما يلي : —

لا ا هي ب

فإذا ما حاولنا أن نعبر عنها بالرسم ، سنجد أنه إذا كانت القضية (لا ا هي ب) ،
قد أمكن التعبير عنها رمزياً — كما سبق — بالصيغة (ا ب = صفر) فإن القضية
(لا ا هي ب) يجب أن يعبر عنها رمزياً بالصيغة :

$$ا ب = \text{صفر}$$

كما يمكن التعبير عنها بالرسم كما يلي . —



شكل ٢٣

ويلاحظ من الشكل السابق أن القضية الاستيعادية قد أمكن التعبير عنها على أنها
قضية كلية سالبة . هذا ويمكن التعبير عنها كذلك باعتبارها قضية كلية موجبة ذات

(١) Only A are B .

(م ٦ — أسس المنطق الرمزي)

حدود معكوسة الترتيب ، أى : (كل ب هي ا) . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى :

∴ (فقط ا هي ب) تكافئ القول : (لا ا هي ب)
 و ∴ (لا ا هي ب) ∴ ∴ : (ا ب = صفر)
 و ∴ (ا ب = صفر) ∴ ∴ : (ب ا = صفر)
 (قانون تبادل الحدود)
 و ∴ (ب ا = صفر) ∴ ∴ : لا ب هي ا
 و ∴ لا ب هي ا ∴ ∴ : كل ب هي ا (بنقض المحمول)
 إذن (فقط ا هي ب) ∴ ∴ : كل ب هي ا (١)

وهكذا أمكن التعبير عن القضية الاستيعادية (فقط ا هي ب) باستخدام قضيتين كليتين إحداهما موجبة (كل ب هي ا) والأخرى سالبة (لا ا هي ب) أو (لا ب هي ا) . (٢)

(١) ويمكن البرهنة على ذلك بطريقة أخرى :

(١) (فقط ا هي ب) تكافئ (لا ا هي ب)
 (٢) (لا ا هي ب) ∴ ∴ (لا ب هي ا) بالمعكس للمستوى .
 (٣) (لا ب هي ا) ∴ ∴ كل ب هي ا بنقض المحمول . وهو المطلوب .

(٢) وبما هو جدير بالملاحظة في هذه الحالة أن القضية (فقط ا هي ب) وإن كانت تكافئ (كل ب هي ا) إلا أنها تختلف عن القضية (كل ا هي ب) ، طالما أن الحكم في القضية (فقط ا هي ب) لا ينصرف أساساً إلى ا بل إلى ما هو ليس ا ، أى ا . وما دما نتكلم عن فئتين فقط هما ا ، ب . إذن فالحكم أصلاً ينصرف إلى الفئة ب . ولذا كانت هذه القضية مكافئة للقضية (كل ب هي ا) ما القضية (كل ا هي ب) فالحكم فيها ينصرف إلى ما هو ا .

ب — القضايا الجزئية

١ — الجزئية للوجبة

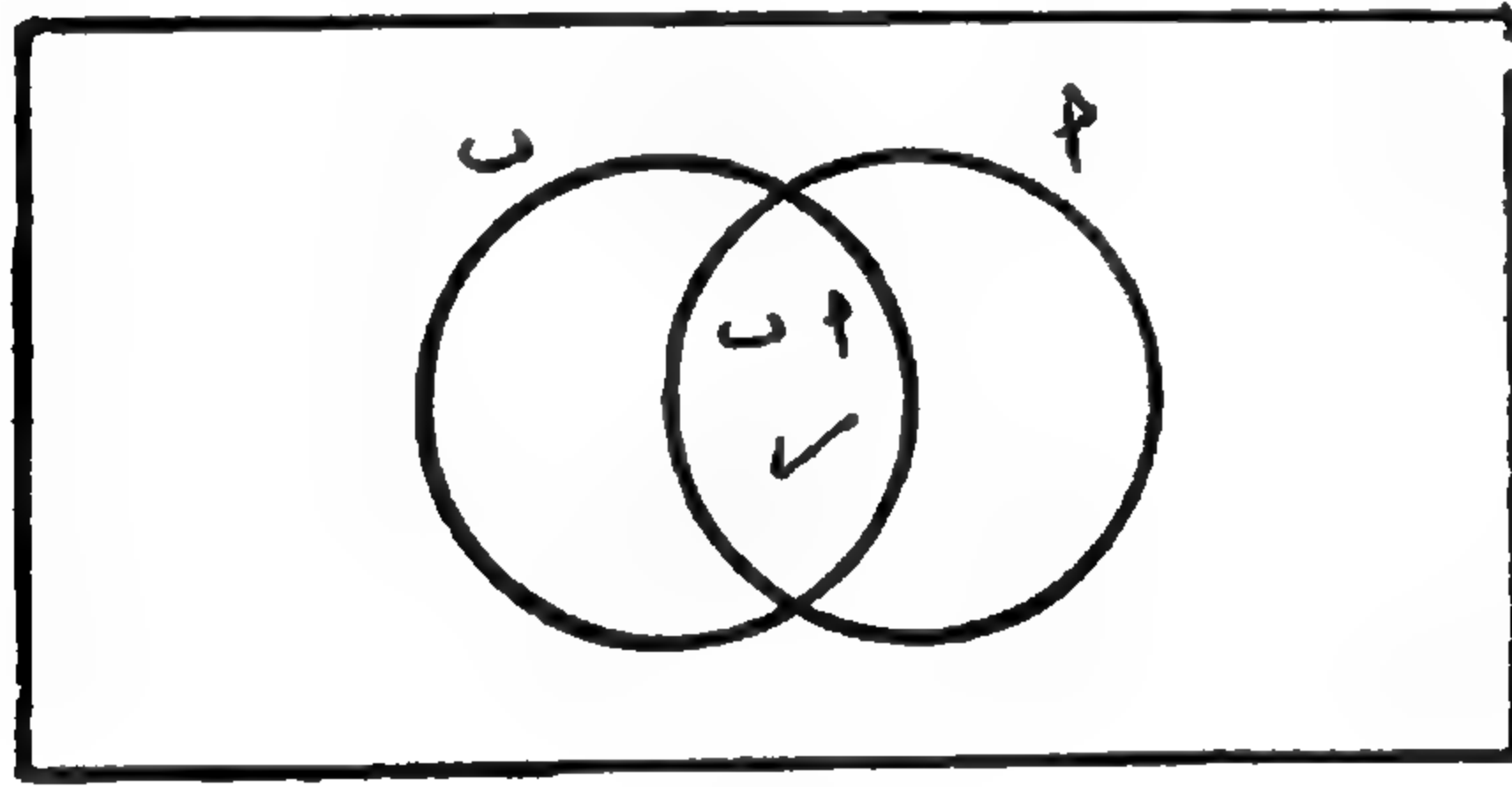
وتتمثل صورتها العامة في الصيغة التالية :

« بعض ا هي ب »

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلي :

$$ا \neq \text{صفر} . (١)$$

كما يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتي :



شكل ٢٤

ويدل هذا الرسم على أن الفئة ا ب ، فئة ذات أعضاء — ولذا وضعنا عليها علامة عضوية الفئة (✓) — وليست فئة فارغة ، أى ليست مساوية للصفر .

ب — الجزئية السالبة :

وتتمثل صورتها العامة في الصيغة التالية :

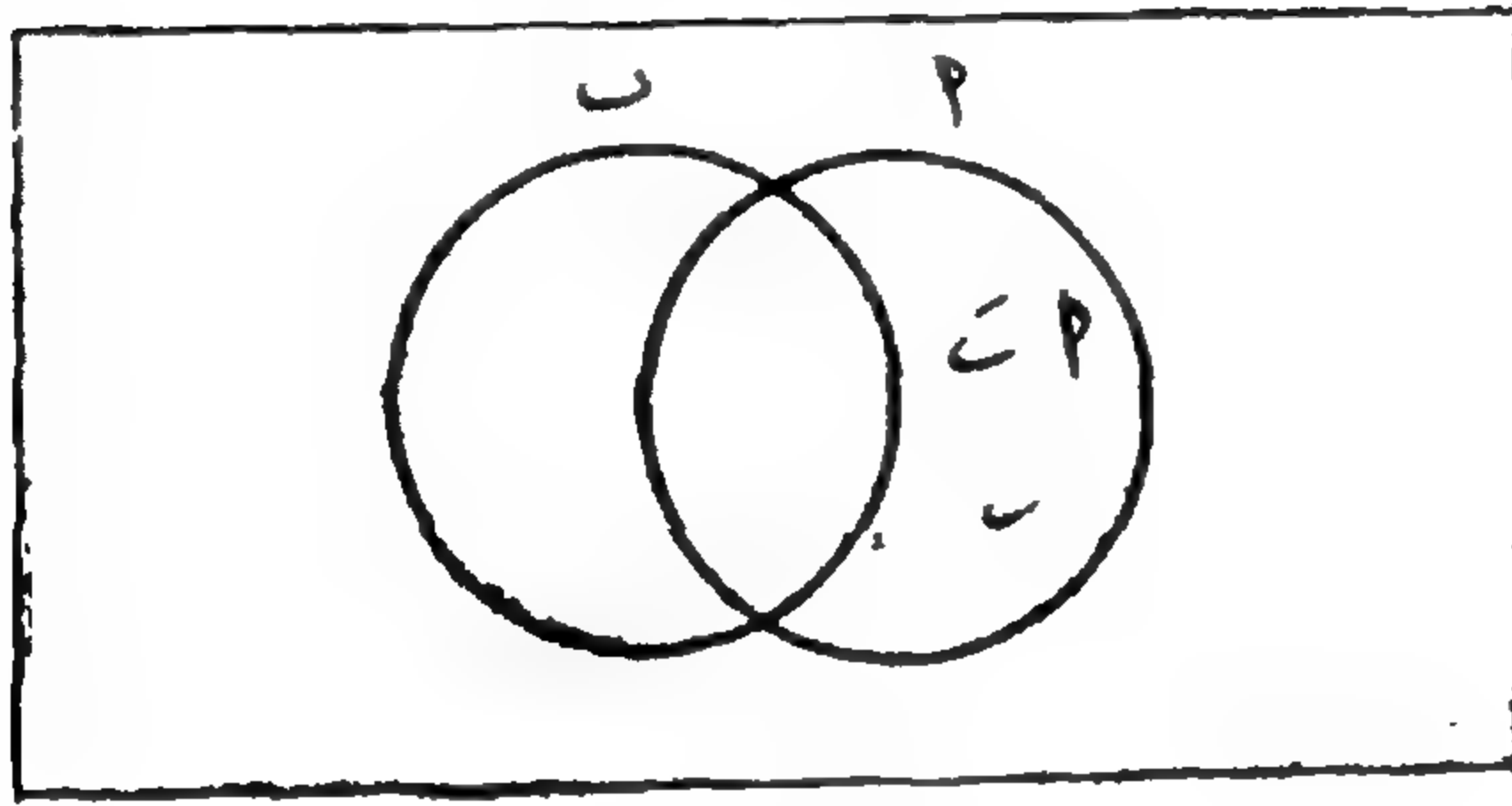
« ليس بعض ا هي ب »

(١) وهذا ما يتضح كذلك من أحكام التقابل بين القضايا في المنطق التقليدي ، فإذا كنا نعبّر عن القضية الكلية السالبة (لا ا هي ب) بالصيغة (ا ب = صفر) ، فإننا نعبّر عن القضية للتناقضة معها ، أى القضية الجزئية للوجبة (بعض ا هي ب) بالصيغة (ا ب \neq صفر) .

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلي :

$$1 \neq \text{صفر} (1)$$

كما يمكن التعبير عنها باستخدام شكل فن على النحو الآتي : —



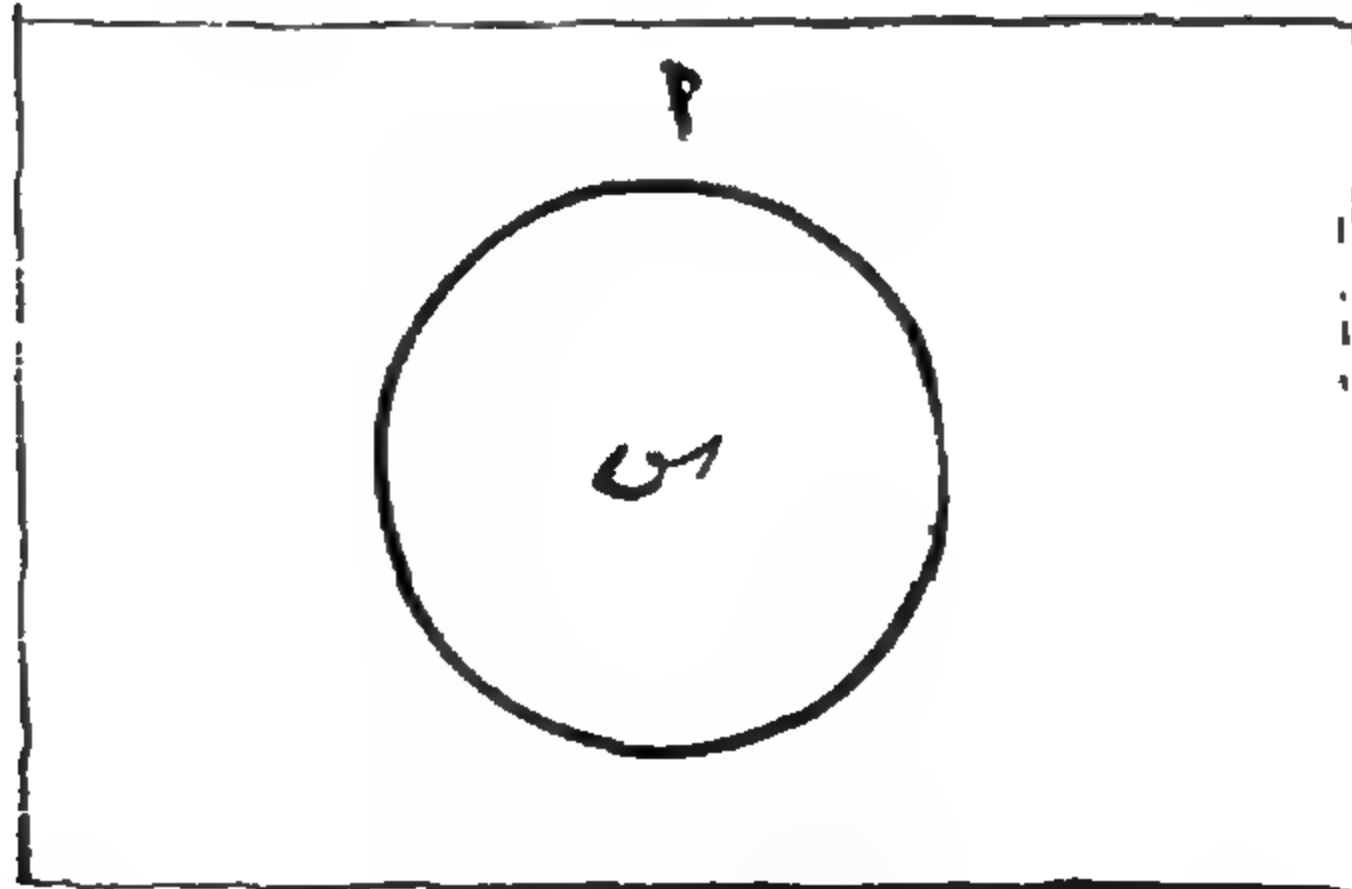
شكل ٢٥

ح — القضايا المفردة

عادة ما يعبر عن عضوية الفرد في فئة ، بالصيغة العامة التالية :

$$س \equiv 1$$

ولقد أوضحنا من قبل أن الشكل الذي يستخدم لذلك ، هو الذي توضع فيه « س » وسط دائرة الفئة 1 في مربع عالم المقال :



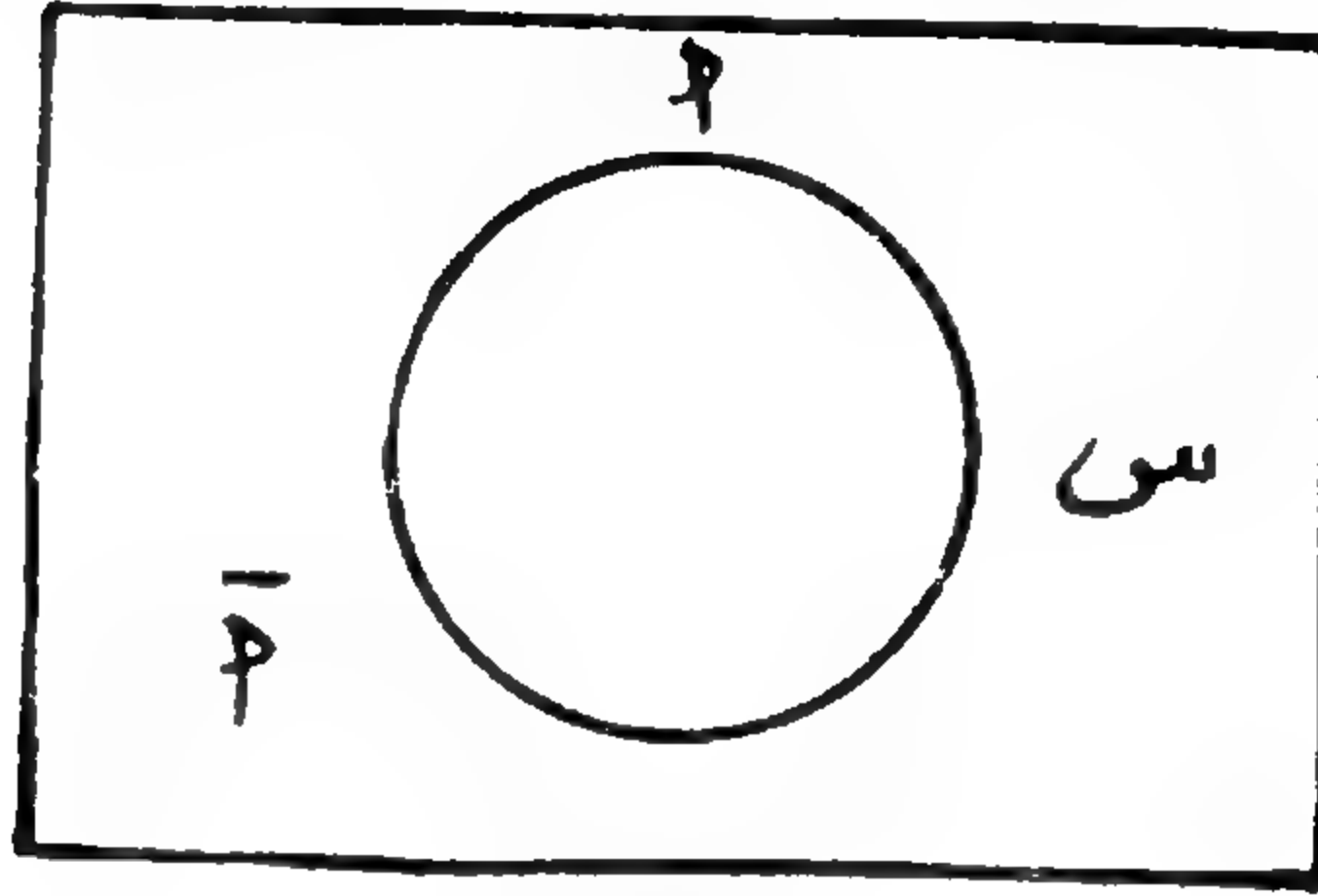
شكل ٢٦

(١) وهذا ما يتضح من أحكام التناقض في المنطق التقليدي ، فإذا كنا نعبر عن =

وعادة ما نعبر عن نفي هذه القضية باستبعاد S عن عضوية الفئة A ، وذلك بالصيغة التالية :

$$S \equiv \bar{A}$$

أو بوضع « S » خارج دائرة الفئة A ، لو استخدمنا الرسم :

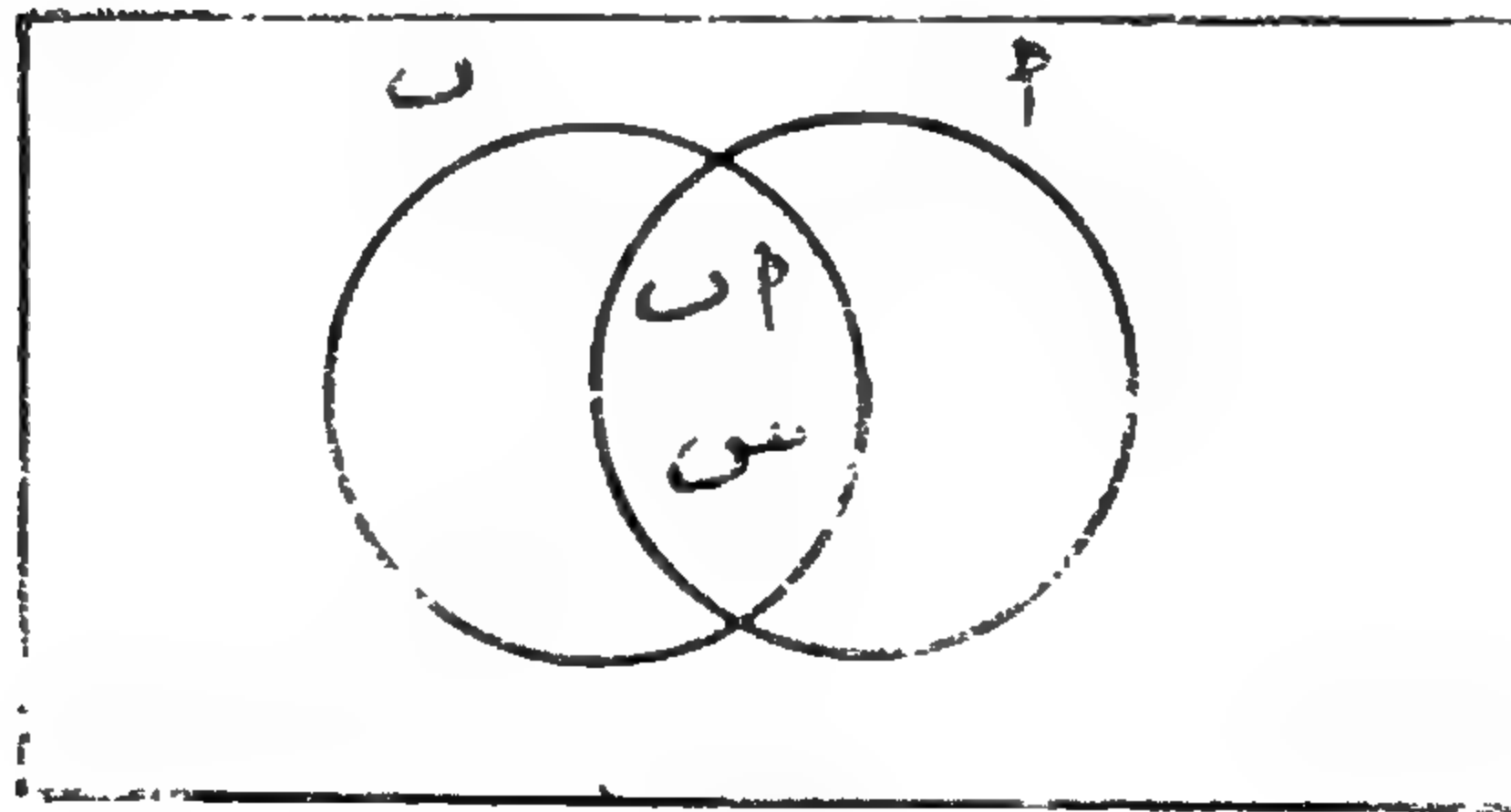


شكل ٢٧

أما إذا كنا نتكلم عن الفرد S من حيث هو عضو :
١ — في الفئة المشتركة بين A ، B فإننا نرمز له بالصيغة التالية :

$$S \equiv AB$$

ونعبر عنها بالرسم كما يلي :



شكل ٢٨

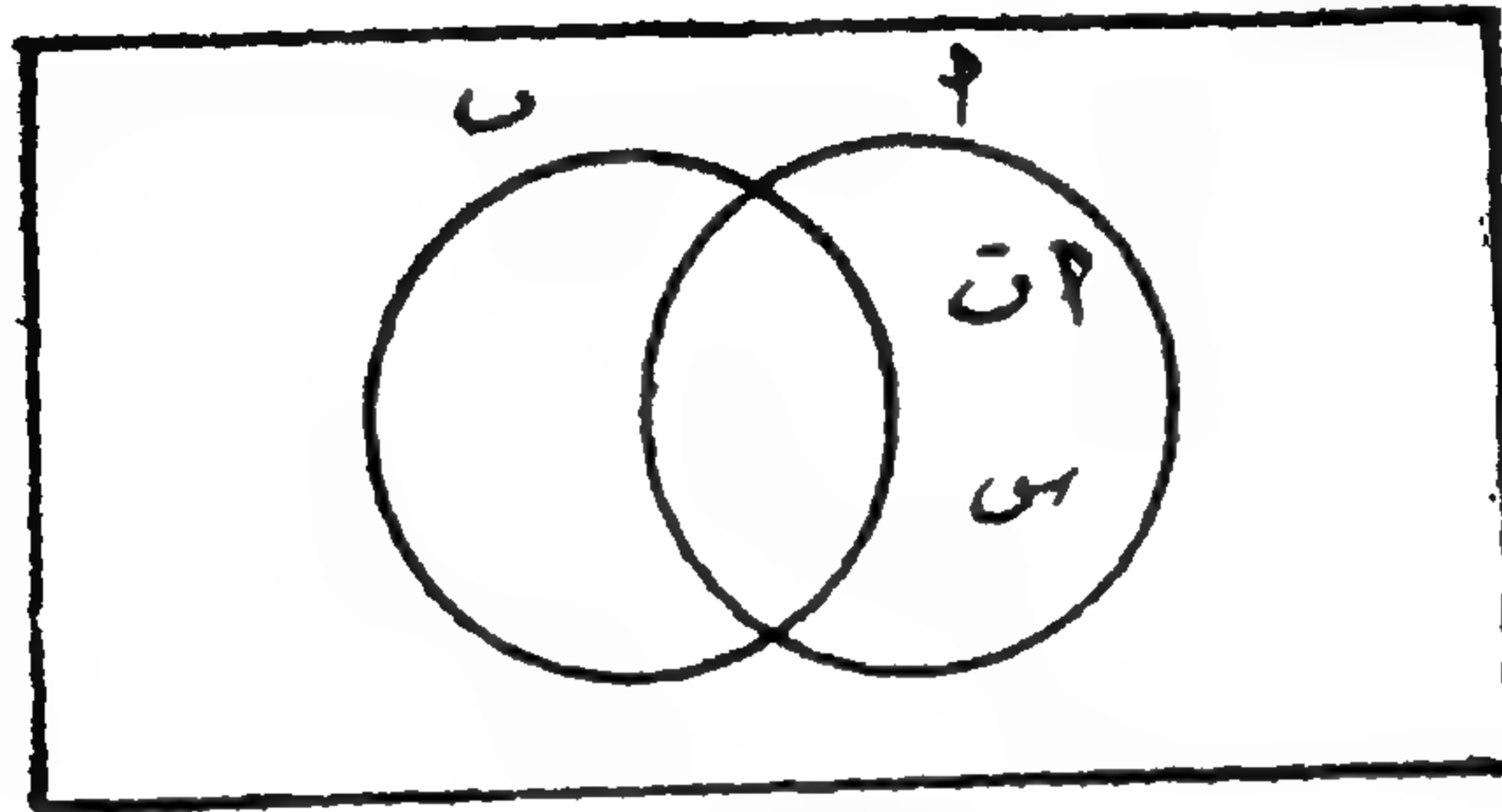
= القضية الكلية الموجبة (كل A هي B) بالصيغة ($A \subset B$ = صفر) ، فإننا نعبر
عن القضية المتناقضة معها ، أي الجزئية السالبة (ليس بعض A هي B) بالصيغة
($A \not\subset B$ = صفر .)

ويكون نقي هذه القضية هو: $\overline{(A \supset B)}$

٢ - أو الفئة التي تكون A وليست B ، ونرمز له بالصيغة التالية :

س $(A \supset \bar{B})$

ونعبر عنه بالرسم كما يلي :



شكل ٢٩

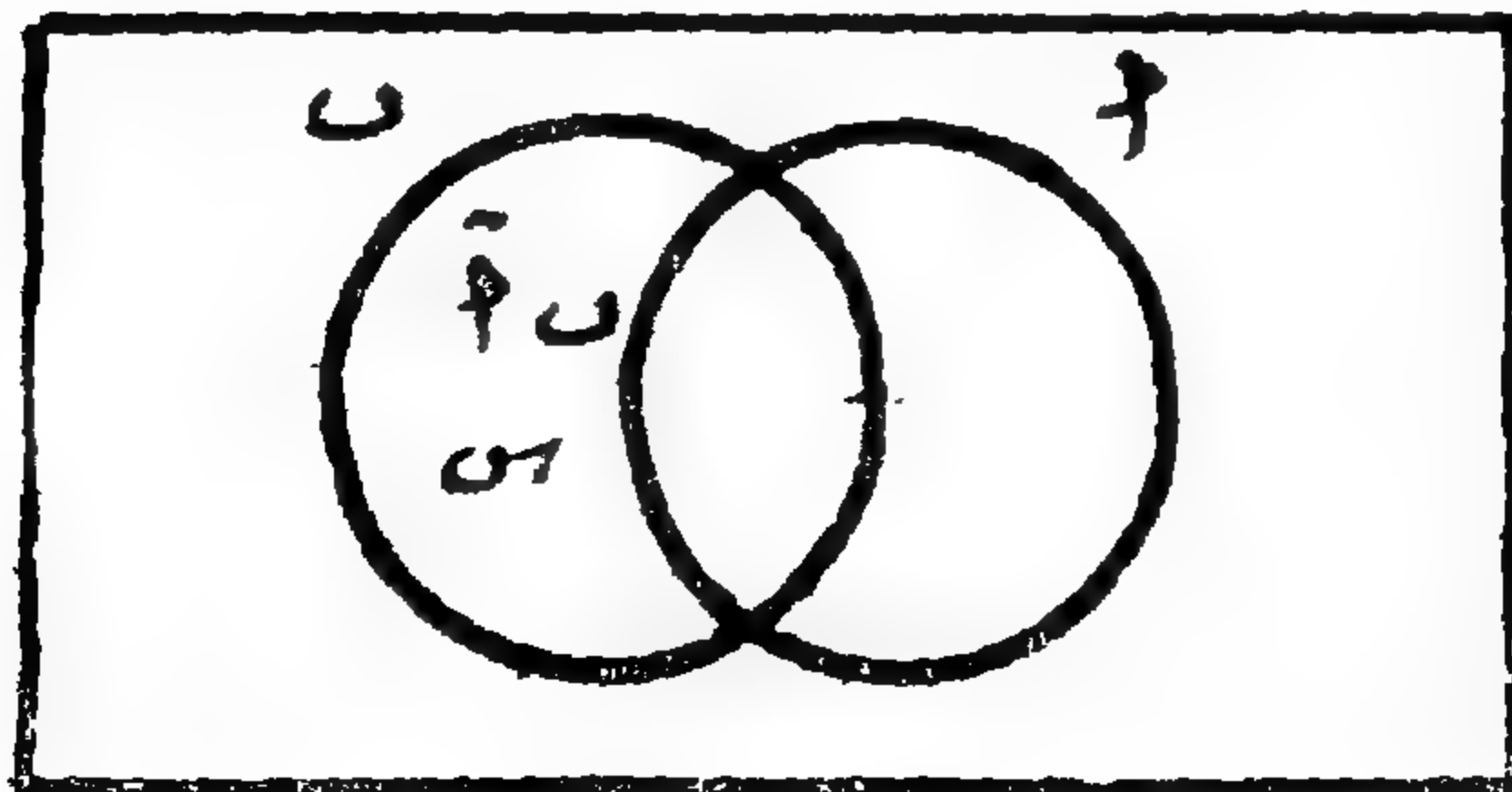
ويكون نقي هذه الصيغة هو:

س $(\bar{A} \supset B)$

٣ - أو في الفئة التي تكون B وليست A ، ونرمز له بالصيغة التالية :

س $(\bar{A} \supset B)$

ونعبر عنه بالرسم كما يلي :



شكل ٣٠

ويكون نفي هذه الصيغة هو :

$$S \equiv (\overline{A \cdot B})$$

القضايا العطفية :

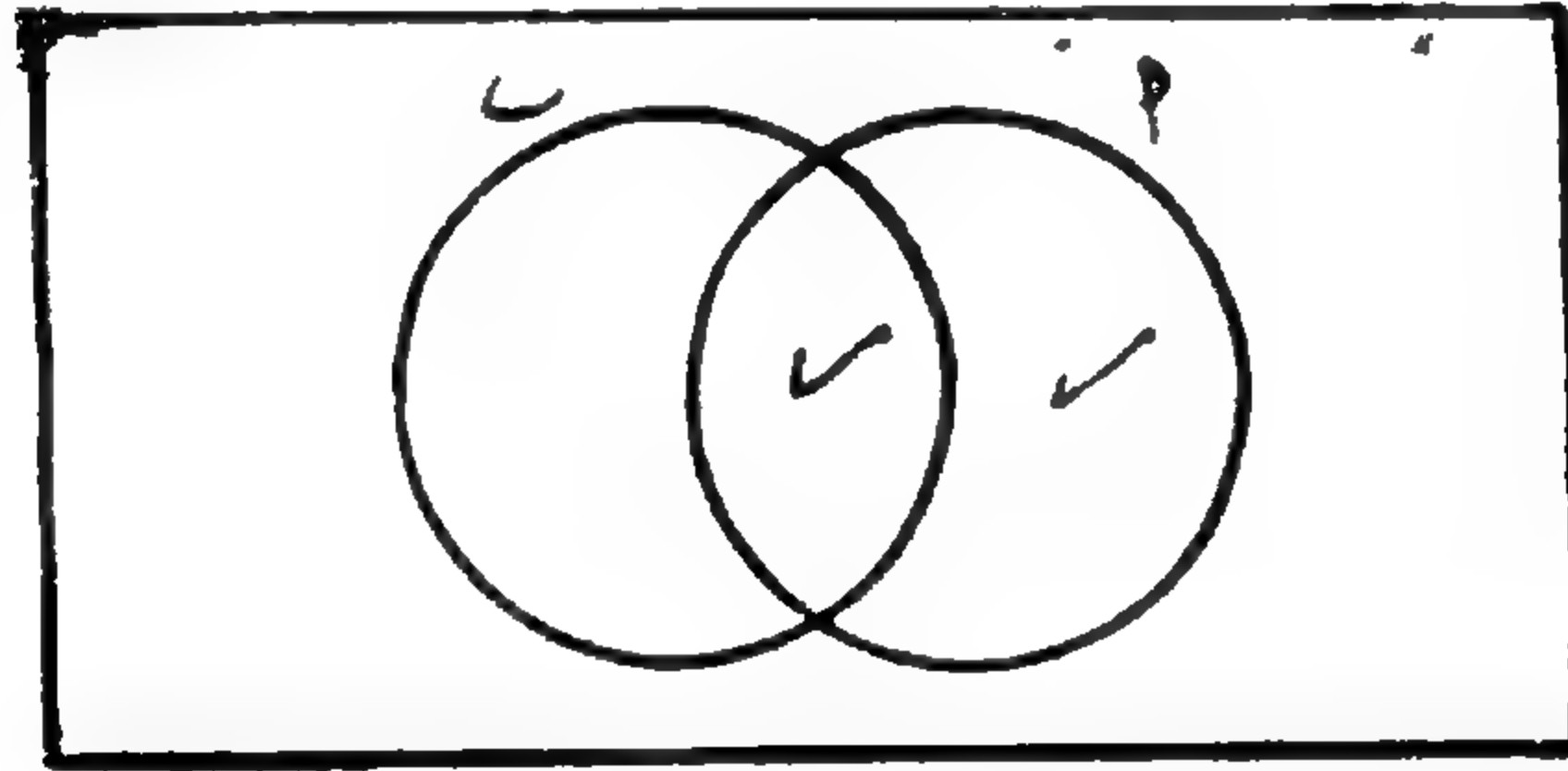
أولاً — للقضايا العطفية الحالصة Pure

١ القضايا الجزئية العطفية Conjunctive Particular

ويمكن التعبير عن القضية الجزئية العطفية رمزياً ، وبالشكل ، على النحو الآتي :

$$(A \neq 0 \text{ صفر} \cdot B \neq 0 \text{ صفر})$$

وتقرأ : A ليست بالفئة الفارغة ، كما أن B ليست كذلك فته فارغة .



شكل ٣١

٢ — قضايا المئات للتطابقة Coextensive Class-Propositions

وهي القضايا التي تفيد تضمن قَئَين إحداهما في الأخرى ، أي التي لو عبرنا عنها بالصيغة (كل A هي B) ، لكان المعنى للاستفاد منها هو : أن الفئة A متضمنة في الفئة B ، وأن الفئة B متضمنة في الفئة A . وهذا يعني أن القَئَين متساويتان من

حيث الأعضاء . (١)

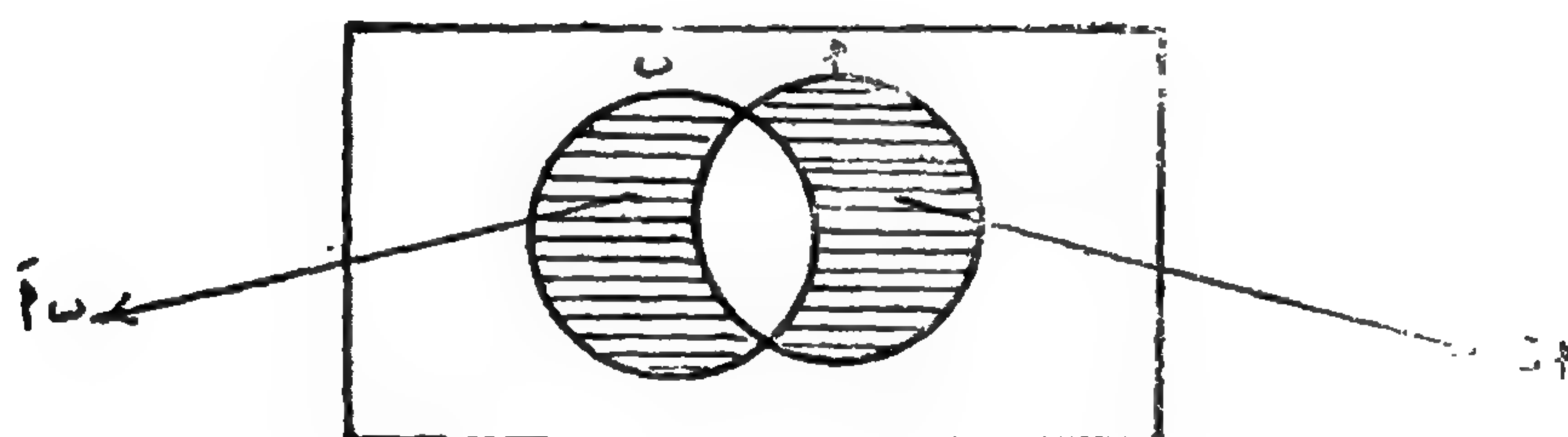
وتتمثل الصورة العامة لهذا النوع من القضايا في الصيغة التالية :

$$(١ ، ١ \text{ فقط هي } ب) (٢)$$

وهي الصيغة التي نمر عنها رمزياً على النحو الآتي :

$$(١ \text{ ب} = \text{صفر} . \text{أ} \text{ ب} = \text{صفر})$$

أى من حيث هي قضية عطف لقضيتين إحداهما تثبت أن ١ متضمنة في $ب$ ،
والأخرى قضية إمتناعية تقرر أن $ب$ متضمنة في ١ . (٣) ويمكن التعبير عن ذلك
بالرسم كما يلي :



شكل ٣٢

(١) ولذا فإن الصيغة التالية . $(١ = ب = ١ \text{ فقط هي } ب . ب = ١ \text{ فقط هي } ب) (٢)$ صيغة صحيحة ،
وتقرأ :

أن القول بأن الفئة ١ تساوى الفئة $ب$ ، يكافئ القول بأن الفئة ١ متضمنة في
الفئة $ب$ ، وبأن الفئة $ب$ متضمنة في الوقت نفسه في الفئة ١ .

(٢) . A and only A are B.

(٣) طالما أن (فقط ١ هي $ب$) تكافئ (كل $ب$ هي ١) ، إرجع إلى صفحة .

وبهذا للمعنى تفيد القضية ($١ ، ١ \text{ فقط هي } ب$) القضيتين التاليتين :

١ — كل ١ هي $ب$ ، أى $(١ \text{ ب} = \text{صفر})$.

كما يمكننا أن نبر عن هذه القضية ذاتها (أى قضية الفئات للتطابقة) ،
 باستخدام صيغة أخرى بديلة ، يذكر فيها الرمز الخاص بجمع الفئات مثل :

$$اب + ا\bar{ب} = \text{صفر} (١)$$

هكذا يمكن القول بأن القضايا الثلاث التالية ، قضايا متكافئة :

$$١ - (١، ١ \text{ فقط هي } ب) .$$

$$٢ - (اب = \text{صفر} . ا\bar{ب} = \text{صفر}) .$$

$$٣ - (اب + ا\bar{ب} = \text{صفر}) .$$

إلا أن مبدأ التكافؤ هذا بين قضايا الفئات لا ينطبق في حالة عدم التساوى
 مع الصفر ، فالقضية التالية : $(اب + ا\bar{ب} \neq \text{صفر})$ ليست متكافئة للقضية التالية
 $(اب \neq \text{صفر} . ا\bar{ب} \neq \text{صفر})$ ، لأن القضية الأولى تثبت وجود أعضاء إما في
 الفئة $اب$ أو في الفئة $ا\bar{ب}$ ، أو فيهما معاً ، في حين أن القضية الثانية تثبت أن كلا
 من الفئتين $اب$ ، $ا\bar{ب}$ هي فئة ذات أعضاء بالفعل .

$$٢ - \text{كل } ب \text{ هي } ا ، \text{ أى } (لا ا \text{ هي } ب = ا\bar{ب} = \text{صفر}) .$$

هذا ويلاحظ أن هناك فارقاً بين القضيتين $(١ \text{ فقط هي } ب)$ وهي قضية
 إستيعادية ، وبين $(١، ١ \text{ فقط هي } ب)$ وهي قضية تطابق بين فئتين . لأن الأولى
 لا تعنى إلا $(\text{كل } ب \text{ هي } ا)$ أى $(ا\bar{ب} = \text{صفر})$ ، في حين أن الثانية تعنى ما تعنى
 الأولى وتزيد عليه القول بأن $(\text{كل } ا \text{ هي } ب)$ أى $(اب = \text{صفر})$.
 (١) ويمكن البرهنة على صحة هذا التعبير كما يلي :

$$\therefore (١، ١ \text{ فقط هي } ب) \text{ تكافئ } (اب = \text{صفر} . ا\bar{ب} = \text{صفر})$$

$$\therefore اب + ا\bar{ب} = \text{صفر} + \text{صفر} .$$

$$\therefore \text{صفر} + \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\therefore اب + ا\bar{ب} = \text{صفر}$$

$$\therefore (١، ١ \text{ فقط هي } ب) \text{ تكافئ } اب + ا\bar{ب} = \text{صفر} \text{ وهو المطلوب}$$

٣ — القضايا الاستثنائية :

وهي القضايا التي تستثنى فيها فئة واحدة فقط من التضمن في فئات أخرى غيرها . ولتأخذ بعض الأمثلة التي توضح ذلك :

(أ) الكل ماعدا الفلاسفة ، عمليون .

(ب) الفلاسفة وحدهم فقط ، غير عمليين .

(ج) لا أحد غير الفلاسفة ، هو غير عملي .

فالقضية الأولى ، تعنى أساساً : أن (جميع من هم غير فلاسفة ، عمليون) ،
أو بعبارة أخرى أن كل من هو غير فيلسوف ، فهو عملي (أو أن كل من هو
ليس أ هو ب) وهي قضية تأخذ الصيغة التالية :

(كل أ هي ب)

فإذا كانت القضية : (كل أ ب) ، يرمز لها بالصيغة (أ ب = صفر) .

فإننا نرمز للقضية : (كل أ هي ب) بالصيغة : (أ ب = صفر) (١)

هكذا أمكن التعبير عن القضية الاستثنائية (الكل ماعدا أ هو ب) باعتبارها
قضية كلية موجبة : (كل أ هي ب) . إلا أننا نستطيع القول بأنها تعنى كذلك
إثبات القضية الكلية السالبة (لا أ هي ب) ، أي (أ ب = صفر) .

ومن ثم فإن الصياغة الرمزية العطفية الدالة عليها ، يمكن أن تكون على
النحو الآتي : —

(١) لأن : (كل أ هي ب) تكافئ — باستخدام تقص الممول — (لا أ هي ب)

∴ (لا أ هي ب) » أ ب = صفر .

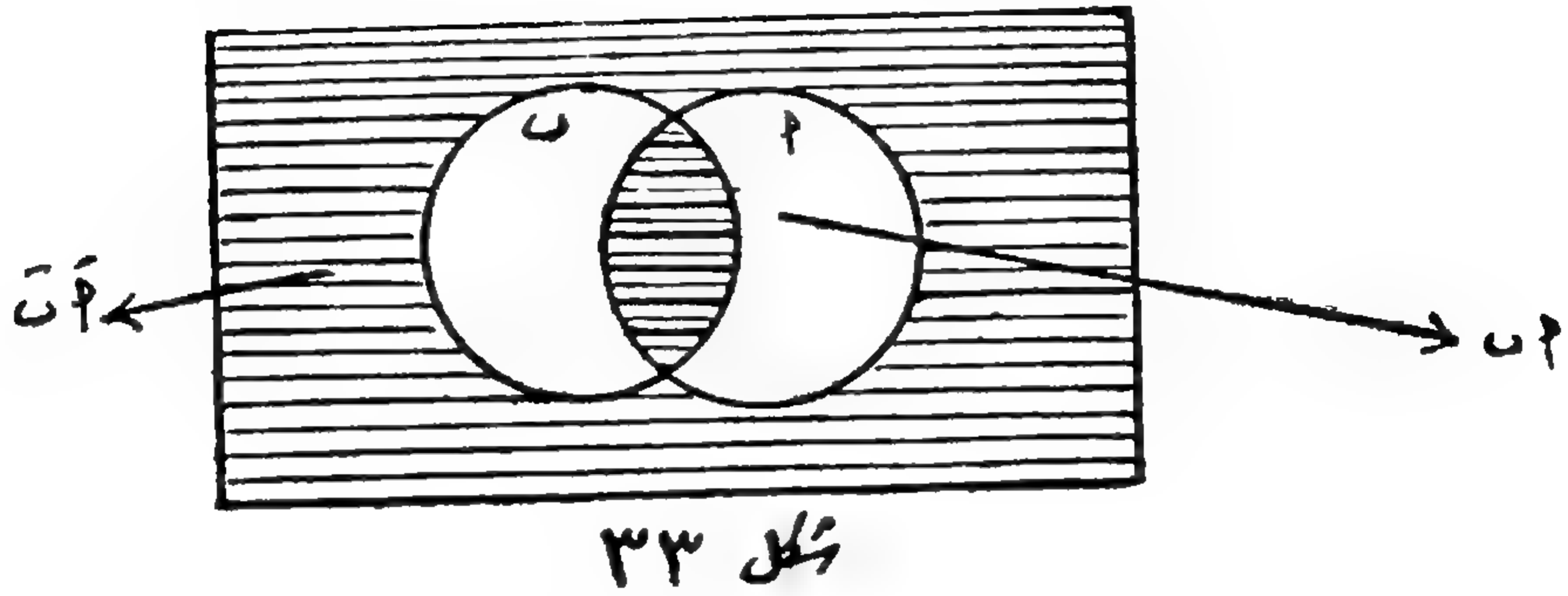
∴ (لا أ هي ب) » (أ ب = صفر) .

∴ (كل أ هي ب) » (أ ب = صفر) . وهو المطلوب .

$$١ - (\bar{a}b = \text{صفر} \cdot ab = \text{صفر})$$

$$٢ - (\bar{a}b + ab = \text{صفر}) \cdot$$

ويمكن التعبير عن تلك الصياغة بالرسم كما يلي : -



ثانياً : القضايا العطفية المختلطة Mixed Conjunctive Propositions

(١) القضايا الوجودية الموجبة Existential

نحن نفرق عادة في قضايا الفئات بين نوعين من القضايا الكلية ، من حيث دلالتها على وجود أو عدم وجود أعضاء في الفئات التي تكون منها . فإذا لم تكن دالة على أعضاء في الفئات سميت القضية في هذه الحالة بالقضية الشرطية ، لأنها تأخذ صورة القضية الشرطية . والواقع أن جميع القضايا الكلية التي ذكرناها من قبل هي من هذا النوع .

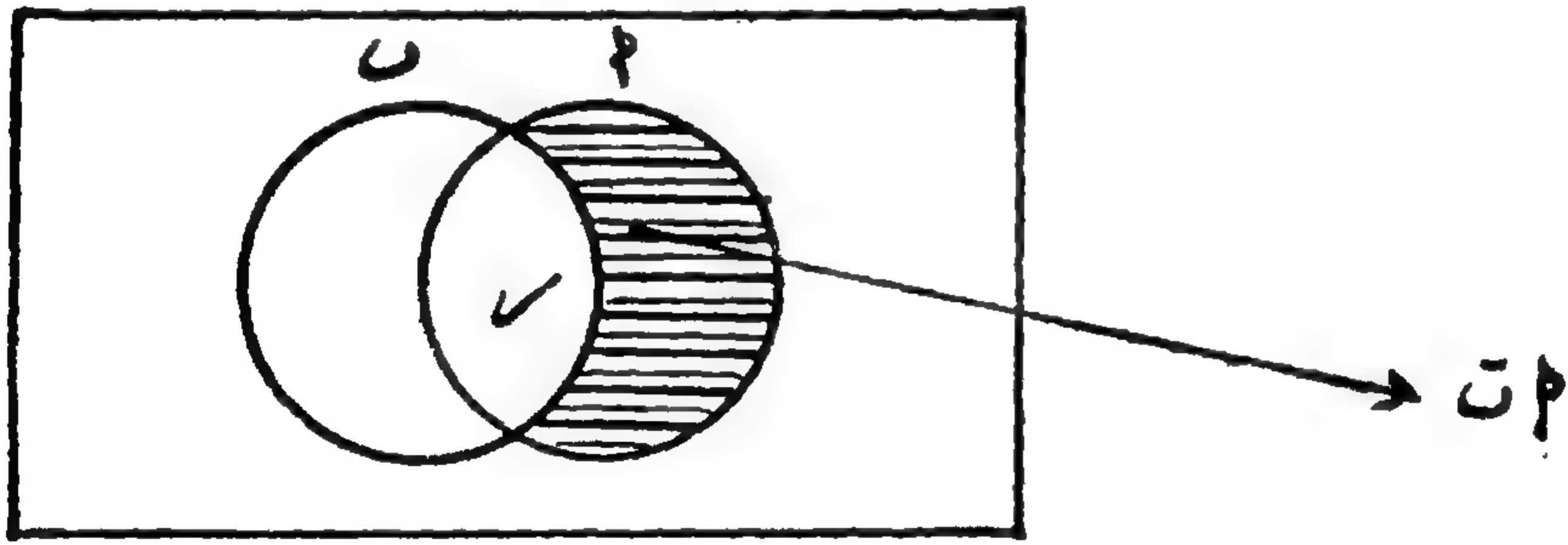
فالقضية التالية مثلاً : (كل ا هي ب) ، تعني أنه : (إذا كان هناك أعضاء في الفئة ا ، فهي لابد وأن تكون متصفة بالصفة ب) . ويلاحظ في هذه الحالة أننا لا نتكلم عن وجود أعضاء بالفعل في الفئة ا ، إنما نقول أنه لو كان هناك وجود لهذه الأعضاء بالفعل ، لاتصفت بكذا وكذا من الصفات . ولقد عبرنا رمزيًا عن هذا النوع من القضايا بالصيغة التالية (ab̄ = صفر) .

لكننا نستطيع أن نتكلم في القضية الكلية الموجبة نفسها أيضا عن وجود أعضاء في الفئة A ، وأنها متصفة بالفعل بكونها B . وفي هذه الحالة الجديدة نلاحظ أن القضية نفسها (كل A هي B) لا تثبت فقط أن ($A \subset B$ = صفر) بل تثبت كذلك أن الفئة A فئة ذات أعضاء . وبما أن الفئة A في شكل فن تتكون من فئتين إحداها A والثانية A' ، وبما أن الفئة A' لا يمكن أن تحتوى على أعضاء لأنها فئة فارغة أو مساوية للصفر ، إذن فلا بد وأن يكون موضع هذه الأعضاء في ذلك الجزء المتبقى من الفئة A ، أي (A) .

هكذا يكون في استطاعتنا التعبير عن القضية الوجودية الموجبة رمزيا كما يلي : -

$$A \subset B = \text{صفر} . A \neq \text{صفر}$$

وبالرسم كما يلي : -



شكل ٣٤

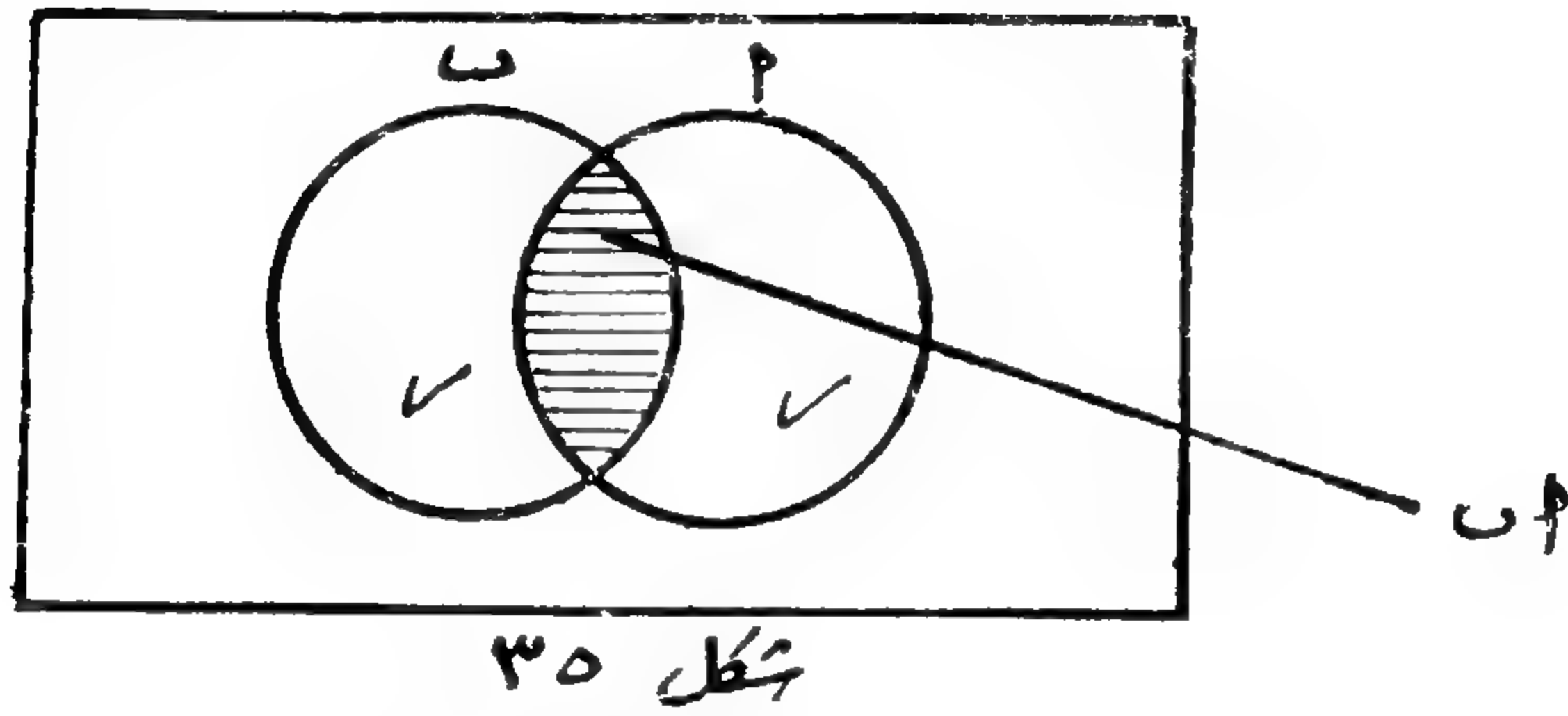
(ب) القضايا الوجودية السالبة Existential Negative Propositions

مثل (لا A هي B) ، وهي لا تعني أيضا ، إذا استخدمت بالمعنى الشرطي وجود أي أعضاء في الفئة A ، بل تعني (أنه إذا وجدت أي أعضاء في الفئة A ، كانت هذه الأعضاء غير متصفة بالصفة B) . ولقد عبرنا عن هذا المعنى من قبل بالصيغة الرمزية ($A \not\subset B$ = صفر) .

أما إذا استخدمت هذه القضية بالمعنى الوجودى ، أمكننا التعبير عنها رمزيا
كما يلى :

$$(١ = صفر . ١ \neq صفر . ٠ \neq صفر)$$

وبالرسم كما يلى :-



هذا ويمكننا تلخيص ما سبق من أنواع قضايا الفئات فى القائمة التالية :-

نوع قضية الفئة	صورتها المألوفة	الصياغة الرمزية	رقم الشكل للمبر عنها
I القضايا البسيطة Simple Propositions			
(أ) الكلية Universal	لا توجد أعضاء في الفئة أ	أ = صفر	٢
(ب) الجزئية Particular	توجد بعض أ	أ ≠ صفر	
(ج) المفردة Singular	س هي أ	س (≡) أ	١٦
١ - للوجبة	س ليست أ	س (≡) أ'	٢٧
٢ - السالبة			
II القضايا المركبة Compound propositions			
(أ) الكلية الشرطية Hypothetical	كل أ هي ب	أ (≡) ب	٢١
١ - للوجبة	لا أ هي ب	أ (≡) ب	٢٢
٢ - السالبة	كل ب هي أ (فقط أ هي ب)	أ (≡) ب	٢٣
٣ - الاستيعادية	بعض أ هي ب	أ (≡) ب	٢٤
(ب) الجزئية	بعض أ ليست ب	أ (≡) ب	٢٥
١ - للوجبة	س هي أ	س (≡) أ	٢٨
٢ - السالبة	س ليست أ	س (≡) (أ)	

			<p>القضايا العطفية</p> <p>Conjunctive Proposition</p>
٣١	$a \neq 0$. $a \neq 0$	بعض a هي b ، وبعض a ليست b	(أ) الجزئية
٣٢	$a = 0$. $a = 0$	كل a هي b ، وكل b هي a	<p>(ب) ذات الفئات المتطابقة</p> <p>Coextensive</p>
٣٣	$a = 0$. $a = 0$	كل a هي b ، ولا a هي b	<p>(ج) الامتنائية</p> <p>Exceptive</p>
٣٤	$a = 0$. $a \neq 0$	كل a هي b (ويوجد بعض a)	١ - الموجبة
٣٥	$a = 0$. $a \neq 0$. $b \neq 0$	لا a هي b (ويوجد بعض a ، وأيضا بعض b) .	٢ - السالبة

الاستدلال الخاص بقضايا الفئات

يمكننا القول بصفة عامة ، أن الاستدلال الصحيح ، هو ذلك الذى تلزم فيه النتيجة لزوماً ضرورياً عن المقدمات . وبعبارة أخرى ، إذا كانت مقدمات الاستدلال الصحيح صادقة ، كانت نتيجة صادقة بالضرورة . كذلك . وبالعكس ، فإذا كانت نتيجة الاستدلال ، الذى يحتوى على مقدمات صادقة — من الممكن أن تكون كاذبة — كان الاستدلال فى هذه الحالة غير صحيح .

أنواع الاستدلالات الخاصة بقضايا الفئات :

يمكن تصنيف الإستدلالات الخاصة بقضايا الفئات إلى صنفين أساسيين هما :
إستدلالات بسيطة Simple Inferences ، وإستدلالات مركبة Compound
١ — الإستدلالات البسيطة : وهى تلك التى تتكون من قضيتين ، مقدمة ونتيجة ، مثل :

$$(١ = صفر) \supset (١ = صفر)$$

ففى هذه الصياغة الرمزية السابقة ، تكون المقدمة هى : (١ = صفر) ،
والنتيجة هى : (١ = صفر) . وتقرأ الصيغة الرمزية كلها على النحو الآتى :
إذا كانت الفئة ١ فئة فارغة ، كانت إذن الفئة ١ فئة فارغة أيضاً أو تقرأ : إذا
لم يكن هناك أى فرد من أفراد الفئة ١ ، كانت إذن ١ هى ب .

٢ — أما الإستدلالات المركبة : فهى التى تحتوى فيها المقدمات أو النتائج على
أكثر من قضية واحدة مثل :

$$(١ = صفر) \cdot (١ = صفر) \equiv (١ + ١ = صفر)$$

وتقرأ : إن القول بأن الفئة A فئة فارغة ، والقول كذلك بأن الفئة B فئة فارغة ، كل هذا يلزم عنه أن تكون الفئة $(A + B)$ فئة فارغة أيضاً .

$$\text{ومثل : } (A + B = \text{صفر}) \supset [(A = \text{صفر}) \cdot (B = \text{صفر})]$$

واللزوم هنا عكس اللزوم السابق ، ولذا فإننا نقرأ : إن القول بأن الفئة $(A + B)$ فئة فارغة ، يلزم عنه القول بأن الفئة A فئة فارغة ، وأن الفئة B فئة فارغة أيضاً . هذا ويمكننا — من المثالين السابقين للاستدلال المركب — أن نلاحظ أن دور المقدمات والنتيجة يمكن أن يكون منعكساً . أى أن هناك نوعاً من الاستدلال للتبادل — أو التكافؤ *Equivalence* — يمكن أن ينشأ بين مثل هذه القضايا . ويمكن توضيح ذلك بالصيغة التالية :

$$[(A = \text{صفر}) \cdot (B = \text{صفر})] \equiv (A + B = \text{صفر}) .$$

وتقرأ : إن القول بأن A فئة فارغة ، وبأن B فئة فارغة أيضاً ، يكافئ القول بأن الفئة $(A + B)$ فئة فارغة . والعكس صحيح .

إختبار صحة الاستدلالات :

يمكن إختبار صحة الاستدلالات الخاصة بقضايا الفئات بأكثر من طريقة ، وسنقتصر هنا على ذكر طريقتين أساسيتين :

١ — باستخدام شكل فن .

٢ — أو باستخدام الإختبار الرمزي الموسع .

أولاً : إختبار صحة الاستدلالات باستخدام الشكل :

إن أية قضية أو مجموعة من القضايا ، تحتوي على فئات لا تزيد عن ثلاث ، إذا

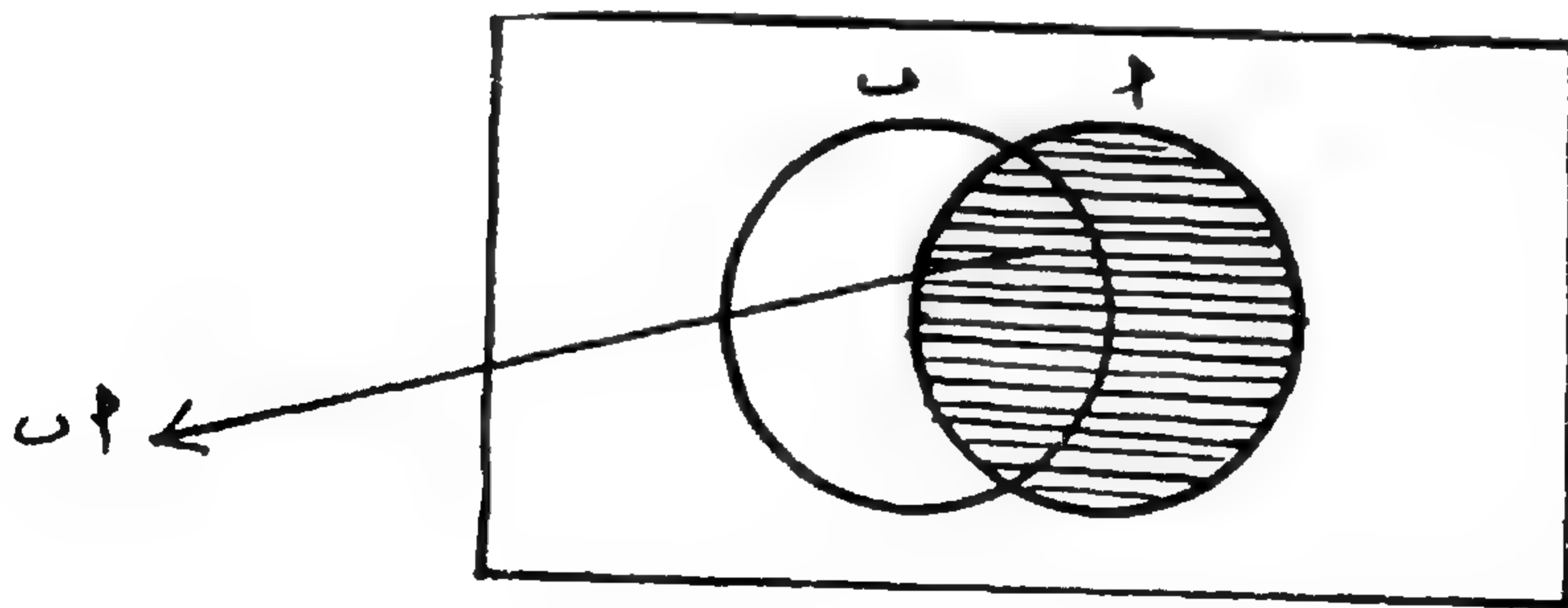
(م ٧ — أسس المنطق الرمزي)

كان من الممكن التعبير عنها رمزيا في منطق الفئات ، فانه من الممكن أيضاً التعبير عنها بواسطة شكل فن . وذلك لأن الاستدلال — كما رأينا — لا يكون صحيحا إلا إذا كانت بنيته من النوع الذى يكون صدق المقدمات فيها يتطلب صدق النتيجة . ولذا فأننا إذا قمنا بإدخال المقدمات فقط ، الخاصة باستدلال صحيح ، على شكل فن ، فأننا نتوقع وجود النتيجة بالفعل في الشكل نفسه . أما إذا كان الاستدلال غير صحيح ، فإن الشكل الخاص بالمقدمات لن يؤدي إلى إظهار النتيجة . ولنوضح ذلك بالأمثلة الآتية : —

١ — لو كان لدينا الاستدلال البسيط التالي : —

$$(1 = \text{صفر}) \supset (1 = \text{صفر})$$

وأردنا أن نختبر مدى صحته ، فأننا نقوم بإدخال مقدمته $(1 = \text{صفر})$ على شكل فن فنحصل بذلك على :



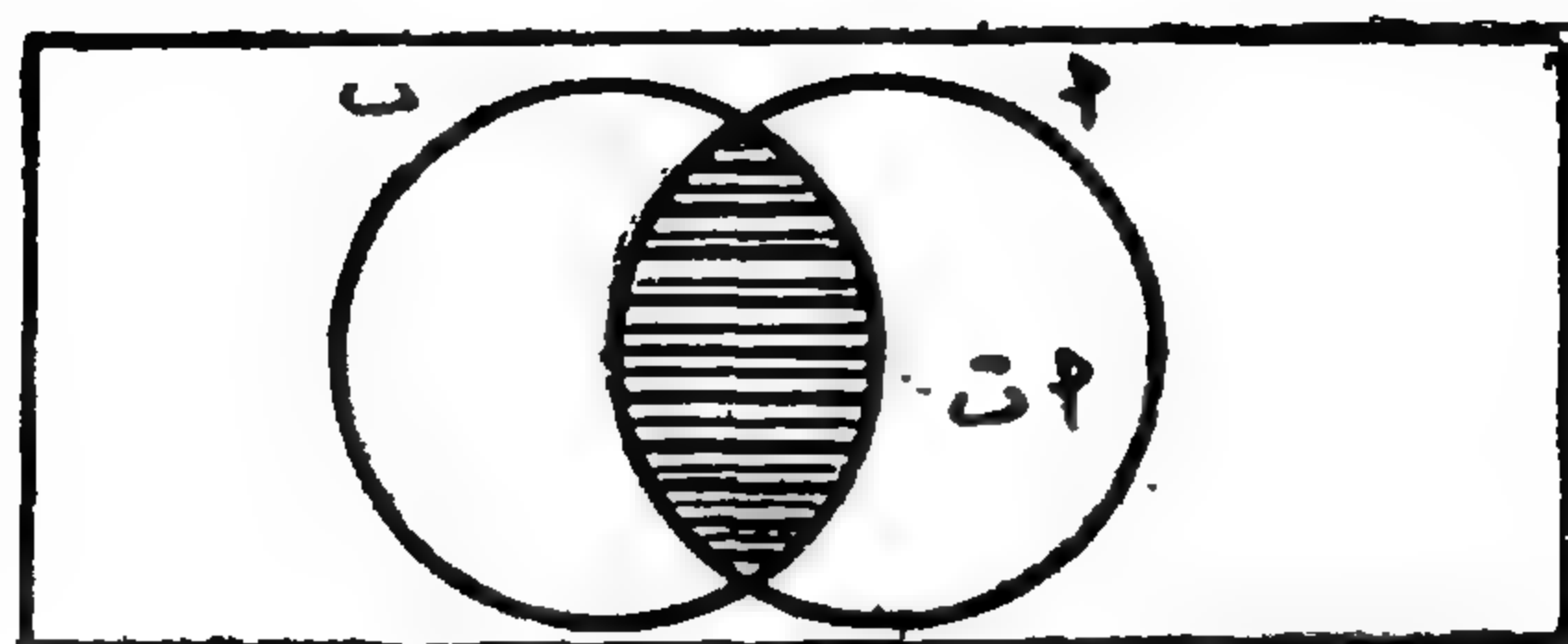
شكل ٣٦

في هذا الشكل ، يمكننا أن نتبين في الحال ، أن النتيجة $(1 = \text{صفر})$ ، حاضرة وموجودة بالفعل ، أى أنها متضمنة بالفعل في القول بالمقدمة ، ولازمة عنها في الوقت نفسه ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — ومع ذلك ، فنحن إذا ما اخترنا عكس الاستدلال السابق ، أى :

$$(١ = \text{صفر}) \Rightarrow (١ = \text{صفر})$$

بالطريقة ذاتها حصلنا على الشكل التالى :



شكل ٣٧

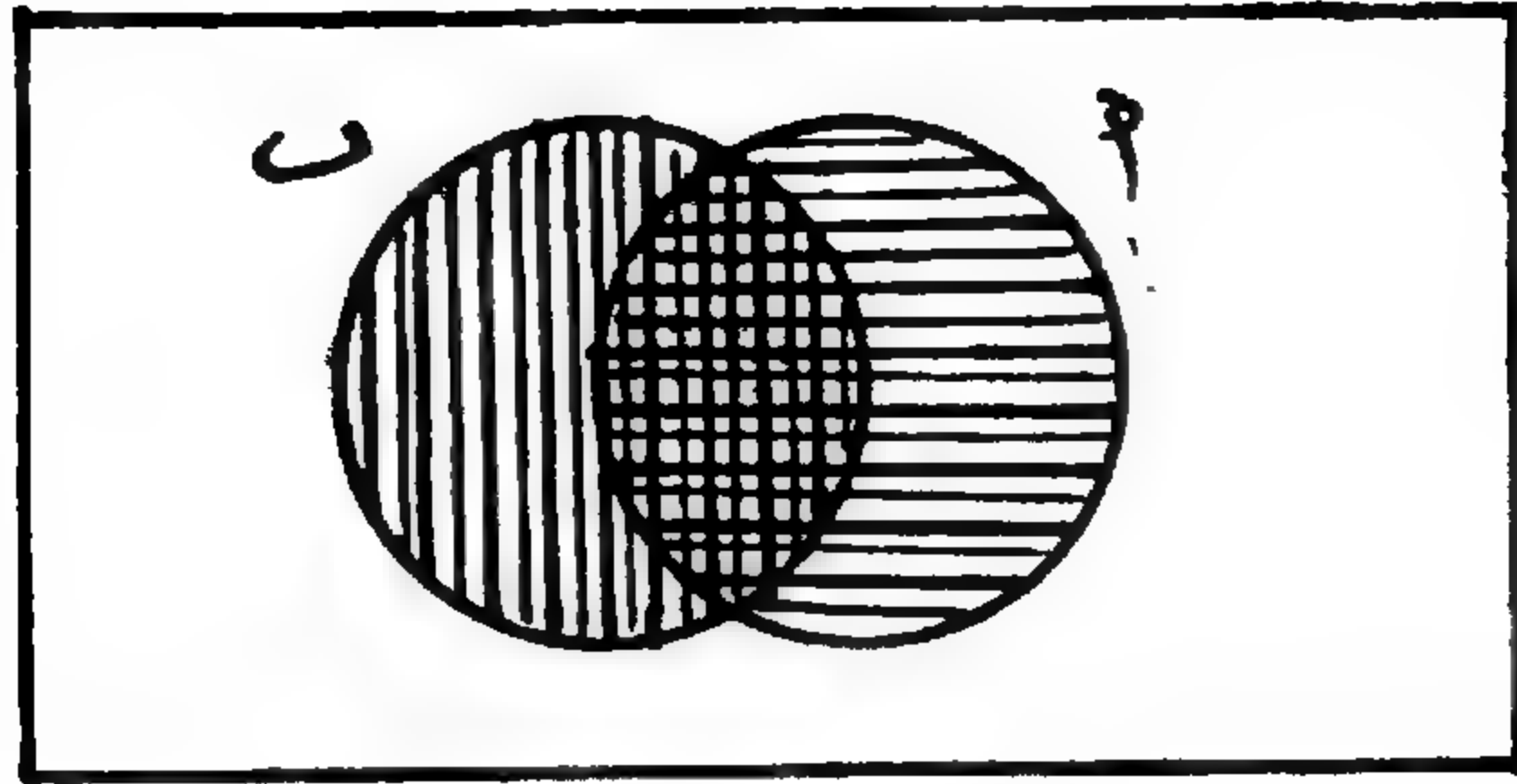
وهنا نرى بوضوح أن النتيجة (١ = صفر) ليست لازمة بالضرورة عن المقدمة (١ = صفر) طالما أن الفئة ١ تكون من فئتين فرعيتين هما (١ ب) ، (١ ب⁻) ، وقد عرفنا عن الأولى أنها مساوية للصفر ، لكننا لا نعرف شيئاً عن الفئة (١ ب⁻) وما إذا كانت مساوية هى أيضاً للصفر أم لا . وعلى ذلك فالنتيجة قد تكون صادقة وقد تكون كاذبة ، ومن ثم فالاستدلال غير صحيح .

٣ — لو كان لدينا الاستدلال التبادلى (١) الذى يلزم عن قضية التكافؤ التالية :

$$[(١ = \text{صفر}) \cdot (ب = \text{صفر})] \equiv (١ + ب = \text{صفر})$$

وأردنا أن تبين مدى صحته ، فإنا نقوم بإدخال إحدى القضيتين التكافئتين على شكل فن على النحو الآتى :

(١) والاستدلال التبادلى reciprocal inference هو القائم على تكافؤ قضيتين ، بحيث تلزم فيه كل واحدة منهما عن الأخرى .



شكل ٣٨

فيتضح لنا صدق القضية الأخرى مباشرة من الشكل . ومن ثم فإن هذا الشكل يكون برهاناً على صحة قضية التكافؤ التالية :-

$$١ - [(١ = \text{صفر}) \cdot (ب = \text{صفر})] \equiv (١ + ب = \text{صفر}) \quad (١)$$

(١) هذا ومن الممكن أن نبرهن بطريقة أخرى على صحة هذه العبارة الرمزية وكذا العبارتين التاليتين — وسوف نذكر هذا البرهان ، وإن كان مطولاً — حتى يمكن من مقارنة هذه الطريقة بواحدة استخدام الشكل مباشرة ، أن نتبين كم من الجهد والوقت قد وفرناه باستخدام طريقة الشكل في التعرف على صحة الاستدلال . وفيما يلي هذه الطريقة الأخرى :

بما أن العبارة الرمزية العينة تدل على التكافؤ ، فهي تدل على لزوم متبادل ، ولذا فعلينا أن نبرهن على أن : $١ - (١ + ب = \text{صفر}) \supset [(١ = \text{صفر}) \cdot (ب = \text{صفر})]$.
 $٢ - [(ب = \text{صفر}) \cdot (١ = \text{صفر})] \supset (١ + ب = \text{صفر})$. وعلى أن : $١ - [(١ = \text{صفر}) \cdot (ب = \text{صفر})] \supset (١ + ب = \text{صفر})$. وذلك على النحو الآتي :-

البرهان :

(النتيجة الرابعة من شكل فن)
 (فرضاً)

$$\text{أولاً : } \overline{(١ + ب = \text{صفر})} = ١$$

$$١ + ب = \text{صفر}$$

$$\therefore \overline{(١ + ب = \text{صفر})} = ١$$

وأيضا على صحة عبارتي اللزوم اللتين تتيجان عنها وهما :

$$٢ - [(١ = \text{صفر}) \cdot (\text{صفر} = ١)] \supset (\text{صفر} = ١ + ١)$$

$$٣ - (\text{صفر} = ١ + ١) \supset [(١ = \text{صفر}) \cdot (\text{صفر} = ١)]$$

= $\therefore ١ = ١$ (وهذا ما يتضح كذلك من النتيجة رقم ٣ لشكل فن وهي :

$$١ = ١ + ١ + ١ \text{ ، فلو وضعنا الصفر بدلا من } (١ + ١)$$

لحصلنا على : $١ = ١$)

$$١ \times ١ = ١ \therefore ١ = ١ \times ١$$

$$(١) \times ١ = ١$$

$$\text{صفر} \times (١ \times ١) = \text{صفر} \times ١ \times ١ =$$

$$\text{صفر} = \text{صفر} \times ١$$

$$\therefore ١ = \text{صفر}$$

$$٦ \therefore ١ \times \text{صفر} = \text{صفر} \therefore \text{صفر} = ١ \times \text{صفر}$$

$$\therefore \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} \times (\text{صفر} \times \text{صفر}) = \text{صفر} \times \text{صفر} \times \text{صفر} =$$

$$\text{صفر} = \text{صفر} \times \text{صفر}$$

$$\therefore \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\therefore (\text{صفر} = ١ + ١) \supset [(١ = \text{صفر}) \cdot (\text{صفر} = ١)]$$

وهو المطلوب أولا .

ثانيا : لو كانت $١ = \text{صفر}$ وكانت $١ = \text{صفر}$

كانت إذن $١ + ١ = \text{صفر} + \text{صفر}$

$$٦ \therefore \text{صفر} + \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\therefore ١ + ١ = \text{صفر}$$

$$\therefore [(١ = \text{صفر}) \cdot (\text{صفر} = ١ + ١)] \supset (\text{صفر} = ١ + ١)$$

وهو المطلوب ثانيا .

(١) إختبار صحة الاستدلالات البسيطة

أولا : الاستدلالات البسيطة القائمة على النفي للزدوج :

هناك نوع شائع من الاستدلالات القائمة على أساس قانون النفي المزدوج^(١) وعادة ما يسمى هذا النوع من الاستدلال ، بالاستدلال القائم على النقص Obversion ، وهو الذى نستدل فيه على صدق أو كذب قضية ما ، بناء على صدق أو كذب القضية المناقضة لها^(٢) أى المخالفة لها فى الكيف . ولذا فالتنقض يسر لنا عملية التعبير عن قضية ما بواسطة قضية أخرى مختلفة معها كيفا . وذلك على النحو الآتى : —

تنقض القضايا الكلية :

١ — الكلية للوجبة : كل ا هي ب \equiv لا ا هي ب

والتي نعبّر عنها رمزيا على النحو الآتى : —

$$(ا = صفر) \equiv (ا = صفر)$$

٢ — الكلية السالبة : لا ا هي ب \equiv كل ا هي ب

والتي نعبّر عنها رمزيا على النحو الآتى : —

$$(ا = صفر) \equiv (ا = صفر)$$

(١) الذى يأخذ صورة $ا = ا$.

(٢) والمقصود بالتنقض هنا هو نقض المحمول ، ولذا فالقضية المناقضة ليست هي

القضية المتناقضة مع قضية ما . فلو كانت لدينا قضية مثل (كل ا هي ب) ، كانت

القضية المناقضة لها ، أى منقوضة المحمول هي : (لا ا هي ب) ، فى حين تكون

القضية المتناقضة معها هي : (ليس بعض ا هي ب) .

نقض القضايا الجزئية :

١ — الجزئية الموجبة : $\text{بعض ا هي ب} \equiv \text{بعض ا ليس ب}$

ونعبر عنها رمزيا كما يلي : —

$$(ا ب \neq \text{صفر}) \equiv (ا ب \neq \text{صفر})$$

٢ — الجزئية السالبة : $\text{بعض ا ليس ب} \equiv \text{بعض ا هي ب}$

ونعبر عنها رمزيا كما يلي : —

$$(ا ب \neq \text{صفر}) \equiv (ا ب \neq \text{صفر})$$

نقض القضايا المفردة :

١ — المفردة الموجبة : $\text{س هي ا} \equiv \text{س ليست ا}$

ونعبر عنها رمزيا : $(س \equiv ا) \equiv (س \equiv \bar{ا})$

٢ — المفردة السالبة : $\text{س ليست ا} \equiv \text{س هي ا}$

ونعبر عنها رمزيا : $(س \equiv \bar{ا}) \equiv (س \equiv ا)$

ثانيا : الاستدلالات البسيطة القائمة على التبادل :

وهناك نوع آخر من الاستدلالات البسيطة ، وهو ذلك الذى تقوم فيه بالتعبير التبادل لحدى فتبين فى قضية مركبة . ويسمى مثل هذا الاستدلال عادة ، إذا كان قائما على مجرد التبادل (مثل $ا ب \equiv ب ا$) باسم الاستدلال بالعكس *Conversion* . أما إذا كان قائما على التبادل ، وعلى النقي المزدوج فى الوقت نفسه ،سمى الاستدلال فى هذه الحالة بالاستدلال بواسطة عكس النقيض *Contraposition* .

(١) العكس :

والاستدلال بالعكس البسيط يكون صحيحا فى حالتين فقط هما حالة القضية

الكلية السالبة وحالة القضية الجزئية للوجبة ، فهما تعكسان إلى قضية كلية سالبة ، وقضية جزئية موجبة على الترتيب .

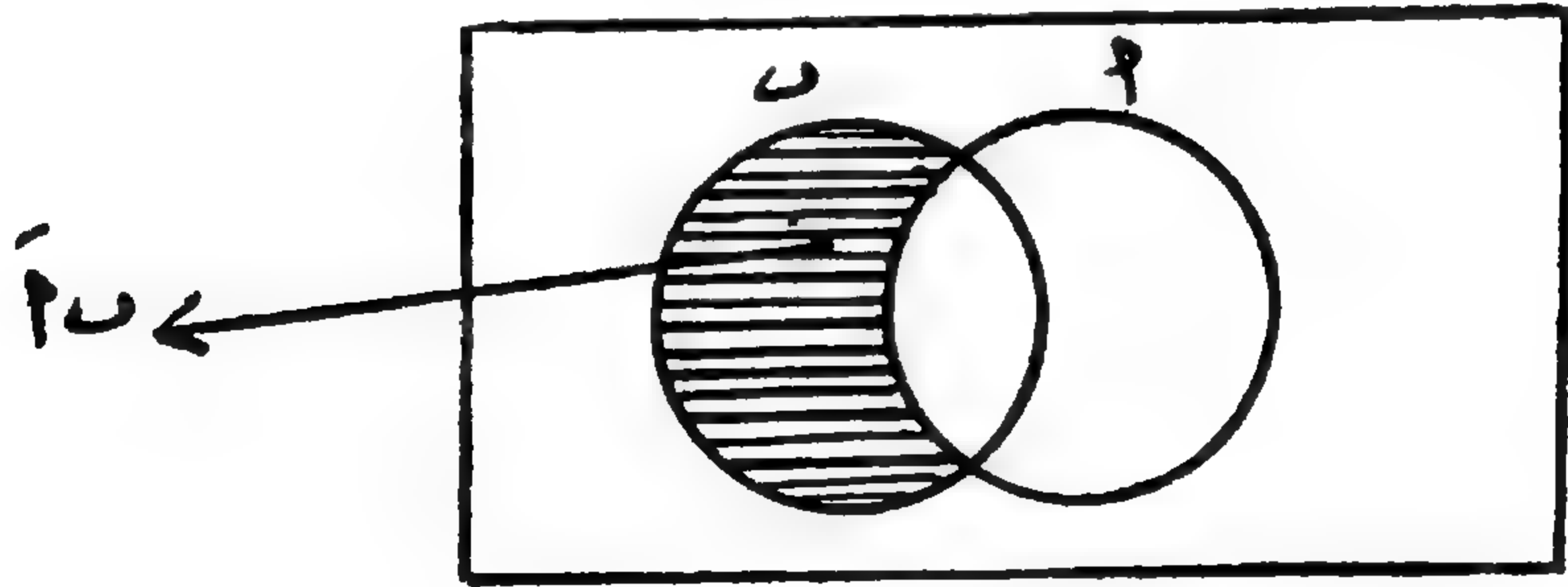
١ - الكلية السالبة : لا ا هي ب \equiv لا ب هي ا

ونعبر عنها رمزيا : (ا ب = صفر) \equiv (ب ا = صفر) .

٢ - الجزئية الموجبة : بعض ا هي ب \equiv بعض ب هي ا .

ونعبر عنها رمزيا : (ا ب \neq صفر) \equiv (ب ا \neq صفر) .

أما عكس القضية الكلية الموجبة أو الجزئية السالبة عكسا مستويا فهو استدلال غير صحيح وهذا ما يتضح من الشكلين ، وكذا من الصياغتين الرمزيتين الخاصتين بهما . ففي الشكل ٢١ الخاص بالقضية (كل ا هي ب) نلاحظ أننا قد ظلنا الفئة ا ب ، في حين أننا لو عكسناها إلى (كل ب هي ا) لحصلنا على الشكل التالي : —



شكل ٢١

الذي يختلف عن الشكل رقم ٢١ . ومن ثم فالقضيتان اللتان نعبر عنهما بالشكلين المختلفين هما كذلك مختلفتان في الصدق . ومن ثم يكون استدلالنا على صدق إحداها بناء على صدق الأخرى ، غير صحيح .

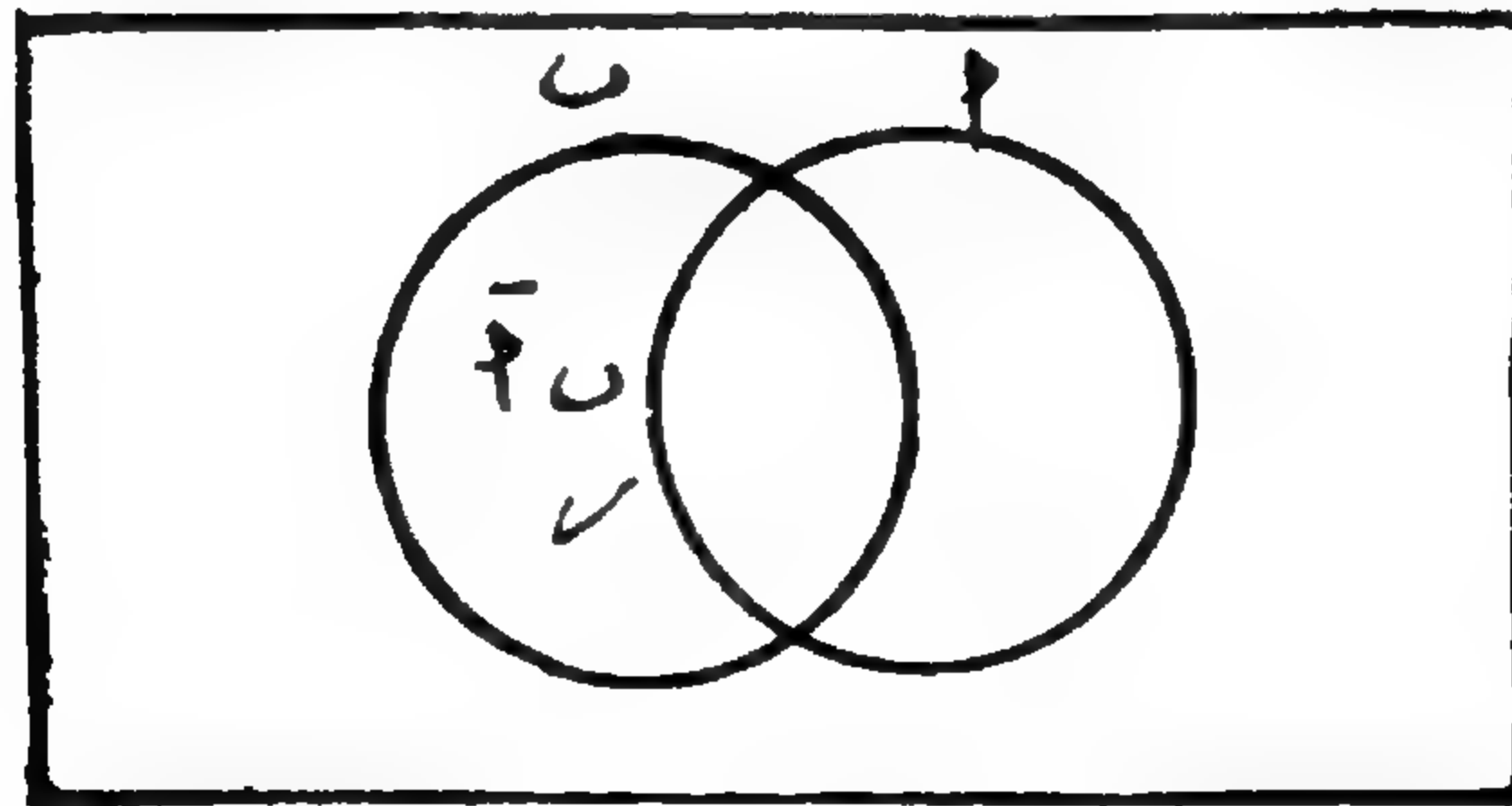
وبالمثل في حالة الصياغة الرمزية ، فنحن حين نطبق قانون التبادل على الصيغة
الرمزية الخاصة بالقضية الكلية الموجبة ، أى : $(ا ب = صفر)$ ، فإننا نحصل على :

$$(ب ا = صفر) \quad (١)$$

التي يجب أن تقرأ : $(لا ب هي ا)$ ، وهي التي يمكن أن ترد في تحليلنا
الأخير لها إلى القضية الكلية الموجبة الأصلية $(كل ا هي ب)$ ، ولا تنتهي بنا
أبدا إلى $(كل ب هي ا)$ أو الصياغة الرمزية الخاصة بها وهي : $(ب ا = صفر)$.
وللبرهنة على ذلك ، نذكر ما يلي :

١ — إن $(لا ب هي ا)$ قضية كلية سالبة ، ومن ثم تعكس عكسا بسيطا
صحيحا فتصبح $(لا ا هي ب)$.

٢ — بنقص المحمول بهذه القضية الأخيرة ، نحصل على $(كل ا هي ب)$ ، ولا
نحصل على $(كل ب هي ا)$. وعلى ذلك فالقضية الكلية الموجبة لا تعكس عكسا
بسيطاً ، ومن ثم فالاستدلال على عكسها بهذا الشكل يكون استدلالا غير صحيح .
كما أننا نلاحظ في الشكل رقم ٢٥ الحاض بالقضية $(ليس بعض ا هي ب)$ ، إننا
قد وضعنا العلامة (\vee) الخاصة بعضوية الفئة ، في الفئة $(ا ب)$. في حين أننا لو
عكسناها إلى $(ليس بعض ب هي ا)$ لحصلنا على الشكل التالي :



شكل ٢٥

(١) لأن : $ا \times ب = ب \times ا$ بناء على قانون التبادل .

الذى يختلف عن الشكل رقم ٢٥ . ومن ثم فالتضيتان اللتان نعبّر عنهما بالشكلين المختلفين هما كذلك مختلفتان في الصدق . ومن ثم يكون استدلالنا على صدق إحداها بناء على صدق الأخرى غير صحيح .

(ب) عكس النقيض :

ونستدل فيه على تكافؤ قضيتين إحداهما تمثل عكس الأخرى مع نقص إحدى القيتين للعكوسيتين ، ولذا فالاستدلالان التاليان صحيحان :

$$١ - \text{كل } A \text{ هي } B \equiv \text{كل } B \text{ هي } A \quad (١)$$

ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلي : —

$$(A \supset B) \equiv (B \supset A) \equiv (A = B) \quad \text{صفر}$$

$$٢ - \text{ليس بعض } A \text{ هي } B \equiv \text{ليس بعض } B \text{ هي } A \quad (٢)$$

ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلي : —

$$(A \not\supset B) \equiv (B \not\supset A) \equiv (A \neq B) \quad \text{صفر}$$

من المثالين السابقين ، يلاحظ إتنا قد إتبعنا خطوتين للوصول إلى التعبير الرمزي

(١) والمقصود هنا عكس النقيض الموافق . وهو في حالة القضية السكليه للوجبه يتم على النحو الآتي : —

$$\text{كل } A \text{ هي } B \xrightarrow{\text{نقض}} \text{لا } A \text{ هي } B \xrightarrow{\text{عكس}} \text{لا } B \text{ هي } A \xrightarrow{\text{نقض}} \text{كل } B \text{ هي } A .$$

$$(٢) \text{ وذلك كما يلي : ليس بعض } A \text{ هي } B \xrightarrow{\text{نقض}} \text{بعض } A \text{ هي } B \xrightarrow{\text{عكس}} \text{بعض } B \text{ هي } A$$

$$\text{ب } A \text{ هي } A \xrightarrow{\text{نقض}} \text{ليس بعض } B \text{ هي } A .$$

الحاصل بعكس النقيض (١) وذلك كما يلي :

أولاً : نذكر القضية للكافة للقضية الأصلية بتطبيق مبدأ التبادل .

ثانياً : نذكر القضية للكافة للقضية الثانية باستخدام مبدأ النفي للزدوج .

فإذا لم يتضح لنا للوهلة الأولى أن قضية التكافؤ الأخيرة في كل من هذين الاستدلالتين السابقين هي قضية عكس النقيض للأولى ، فإننا نوضح الأمر على النحو الآتي :

إذا كانت ($a = b$ صفر) تقرأ : (كل a هي b) ، أمكننا إذن أن نقرأ ($b = a$ صفر) كما يلي : (كل b هي a) ، وذلك لأن :

$$١ - (b = a \text{ صفر}) \equiv (a = b \text{ صفر}) .$$

(باستخدام قانون النفي للزدوج)

$$\text{وبما أن } (b = a \text{ صفر}) \equiv (a = b \text{ صفر})$$

(باستخدام قانون التبادل)

$$\text{وبما أن } (a = b \text{ صفر}) \equiv (كل\ a\ هي\ b)$$

ولأن ٢ - (كل b هي a) ، هي عكس النقيض للوافق للقضية (كل a هي b) .

∴ فنحن نقرأ : ($b = a$ صفر) على أنها (كل b هي a) ، طالما أن أن الصيغتين تعبران عن قضية واحدة هي (كل a هي b) .

وفي الاستدلال الثاني نقول : إذا كانت ($b \neq a$ صفر) تقرأ (بعض b .

(١) ويلاحظ في المنطق التقليدي أننا كنا نتبع ثلاث خطوات للوصول عكس النقيض للوافق هي : النقيض ثم العكس ثم النقيض مرة أخرى .

ليس $\bar{1}$ ، أمكننا إذن أن نقرأ $(\bar{1} \neq \text{صفر})$ كما يلي : $(\text{بعض } \bar{1} \text{ ليس } \bar{1})$.
وذلك لأن :

١ — $(\text{بعض } \bar{1} \text{ ليس } \bar{1})$ هي عكس النقيض للوافق للقضية $(\text{ليس بعض } \bar{1})$ هي $\bar{1}$.

٢ — ولأن $(\bar{1} \neq \text{صفر}) \equiv (\bar{1} \neq \text{صفر})$
(بتطبيق قانون النفي المزدوج)

، $\dots (\bar{1} \neq \text{صفر}) \equiv (\bar{1} \neq \text{صفر})$
(بتطبيق قانون التبادل)

، $\dots (\bar{1} \neq \text{صفر}) \equiv (\text{ليس بعض } \bar{1} \text{ هي } \bar{1})$ ،
∴ فنحن نقرأ الصيغة $(\bar{1} \neq \text{صفر})$ على أنها $(\text{ليس بعض } \bar{1} \text{ هي } \bar{1})$ ،
طالما أن الصيغتين تعبران عن قضية واحدة هي $(\text{ليس بعض } \bar{1} \text{ هي } \bar{1})$.

ثالثاً : الإستدلالات البسيطة القائمة على التباين بالتناقض :

بما أن أي قضيتين متناقضتين ، تكون لهما دائماً قيم صدق متقابلة ، فإننا نستطيع التعبير عن هذه العلاقة باستخدام الرمز الدال على نفي القضية « ~ » .
وهكذا فالتقابل مثلاً بين القضيتين : $(\text{لا وجود لأي } \bar{1})$ ، $(\text{يوجد بعض } \bar{1})$ ، يمكن التعبير عنه رمزياً كما يلي : —

$$(\bar{1} = \text{صفر}) \equiv (\bar{1} \neq \text{صفر})$$

وتوضح هذه الصيغة الرمزية أن إثبات $(\bar{1} = \text{صفر})$ ، يكافئ نفي $(\bar{1} \neq \text{صفر})$.
وبعبارة أخرى نقول : لو كانت الفئة $\bar{1}$ فئة فارغة ، كان من الكذب إذن أن نقول إن الفئة $\bar{1}$ ليست فارغة . والعكس بالعكس . ومثل هذا التقابل يمكن كتابته أيضاً على النحو الآتي :

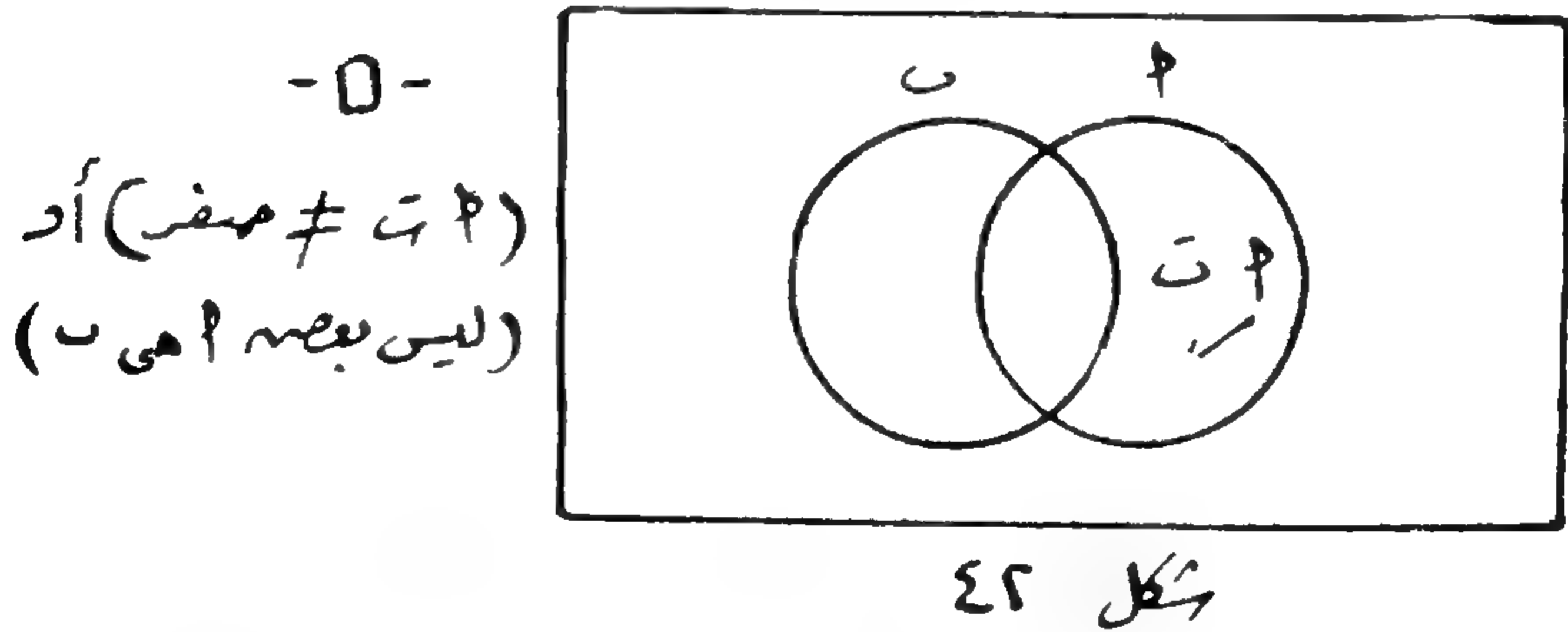
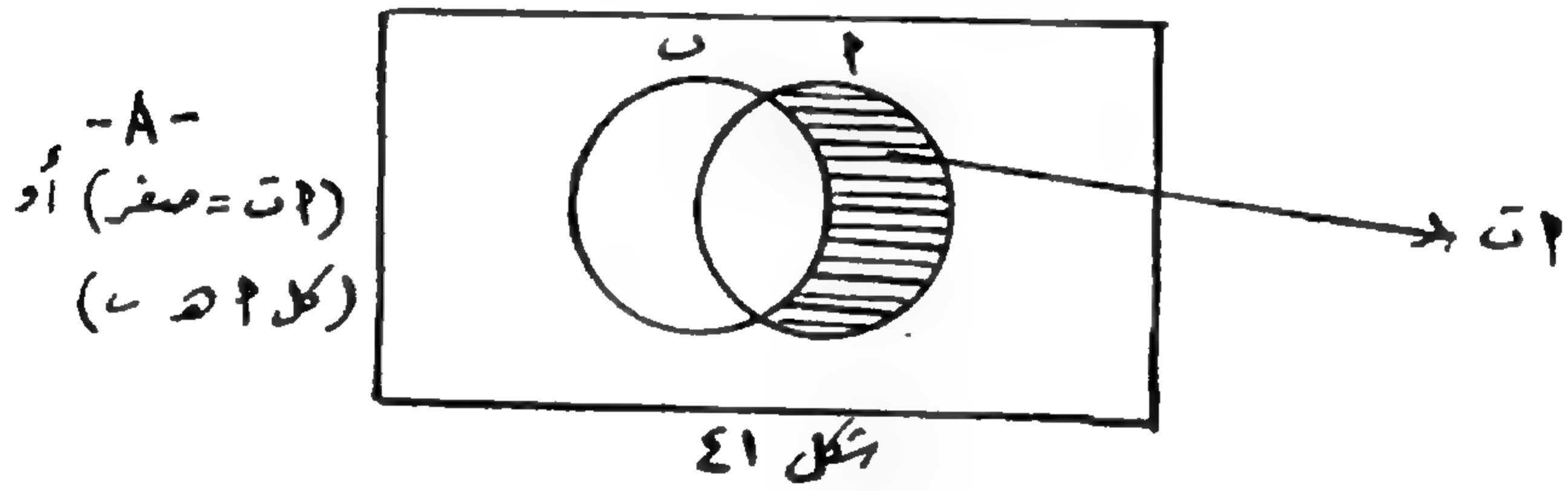
$$١ \equiv (١ \neq \text{صفر}) .$$

وتقرأ : إن كذب القول بأن فئة فارغة ، مكافئ للقول بأن ليست فئة فارغة .

هذا ويمكن التعبير عن التقابل بين قضايا الفئات بالرمز والشكل على النحو الآتي : —

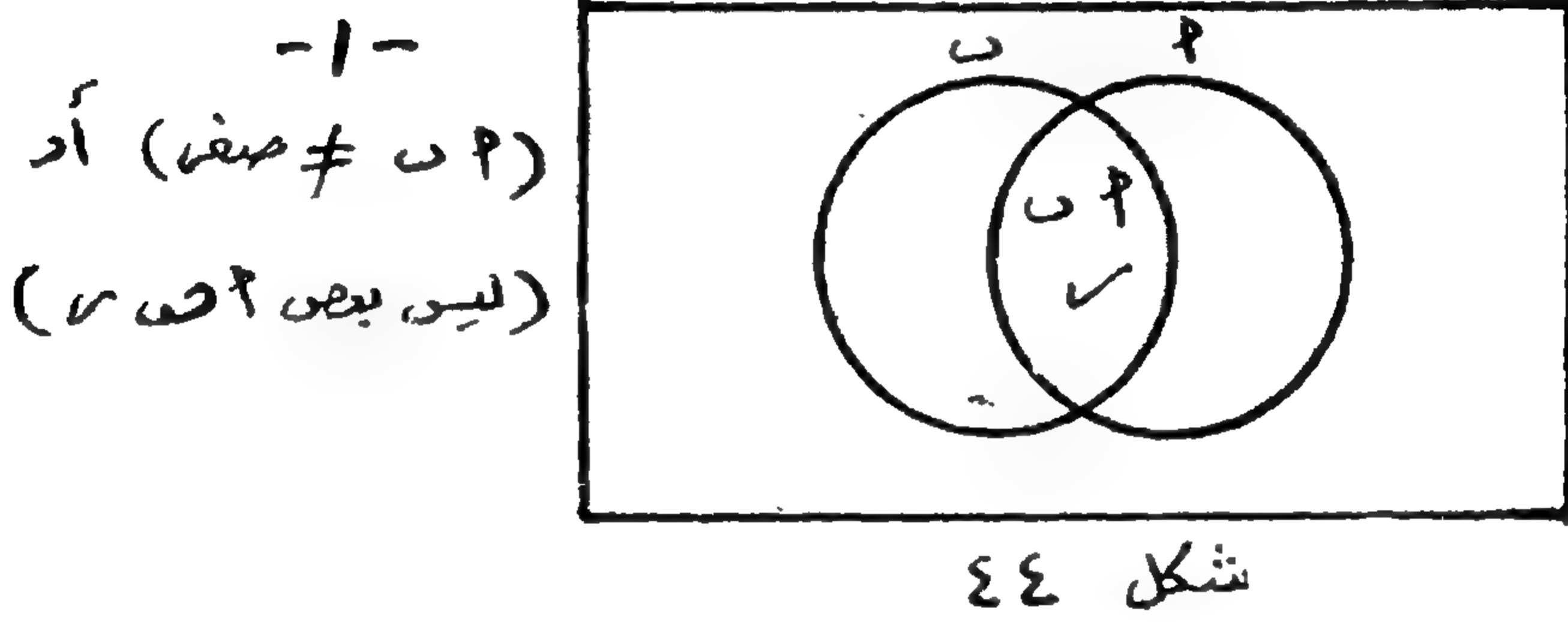
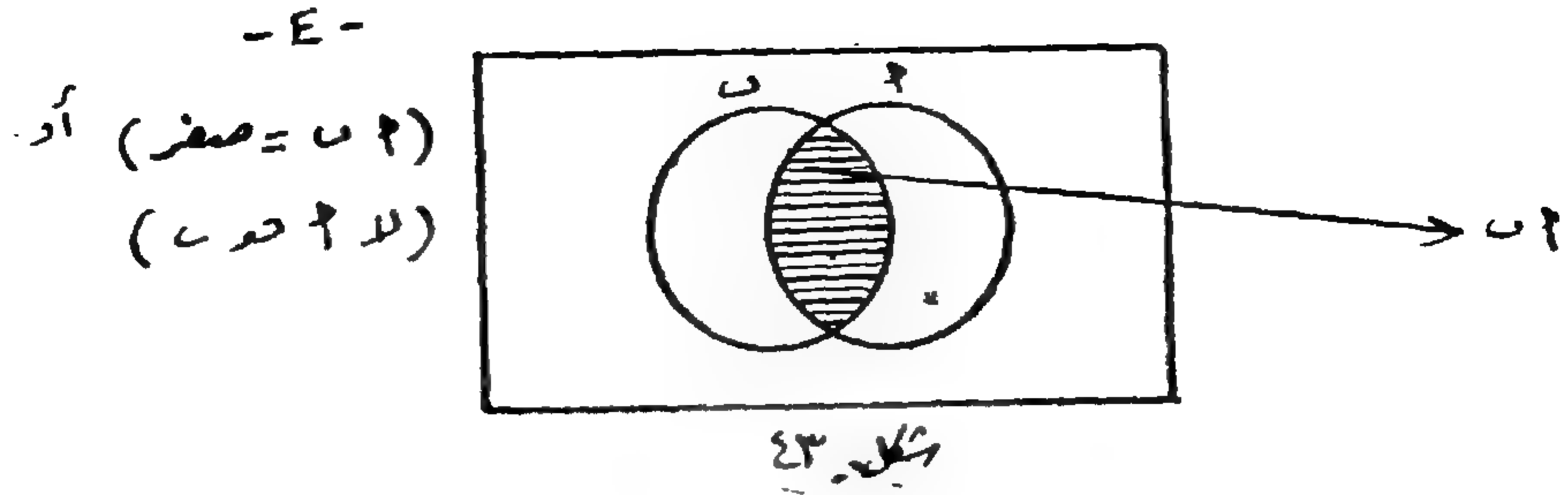
$$(١) \quad (١ \neq \text{صفر}) \equiv (١ \neq \text{صفر})$$

وهي صياغة تعبر عن التناقض بين القضييتين : الكلية الموجبة ، والجزئية السالبة . وهذا ما يتضح من الشكلين التاليين : —



$$(٢) \quad (١ \neq \text{صفر}) \equiv (١ \neq \text{صفر})$$

وهي صيغة تعبر عن التناقض بين القضييتين : الكلية السالبة ، والجزئية الموجبة ، وهذا ما يتضح من الشكلين التاليين :



لكن ما هي القضية التي تتناقض مع القضية المفردة ؟ إن القضية المفردة يمكن اعتبارها متناقضة مع قضية أخرى مفردة ، مختلفة معها في الكيف . وعلى ذلك فصفة التكافؤ التالية ، صيغة صحيحة : —

$$S \equiv (P \equiv \neg P) \text{ أو } S \equiv (P \equiv \neg P)$$

هكذا يصبح في استطاعتنا أن نستدل على صدق قضية ، بناء على صدق أو كذب القضية التي تناقضها ، وأن نستدل على صدق قضية بناء على صدق أو كذب نقي تقيضها .

(ب) اختبار صحة الاستدلالات المركبة

أولا : الاستدلالات المركبة القائمة على التقابل بالتضاد :

القضايا المتضادة تختلف ، كما نعلم ، عن تلك المتناقضة ، في أن القضيتين المتضادتين

على الرغم من أنهما لا تصدقان معاً ، إلا أنهما مع ذلك قد تكذبان معاً . ولنأخذ مثلاً لتلك القضيتين التاليتين :

$$(1 \equiv \text{صفر}) \text{ ، } (س \equiv 1)$$

فهما متضادان ، طالما أن صدق إحداها يستلزم كذب الأخرى ، لكن كذب إحداها لا يستلزم صدق الأخرى . ويمكن التعبير عن هذه الحالة من التضاد ، بالصيغة الرمزية التالية :

$$١ - (1 \equiv \text{صفر}) \supset (س \equiv 1) .$$

$$٢ - (س \equiv 1) \supset (1 \equiv \text{صفر}) .$$

لكننا ذكرنا من قبل أن الاستدلال بالتبادل ينفى بنا إلى معنى التكافؤ . فهل يمكن بناء على الصيغة الرمزية السابقة أن نعبر عن التضاد باستخدام التكافؤ ؟ للإجابة على هذا السؤال ، يجب أن نعرف أولاً ما إذا كان من الممكن أن نعبر عن التضاد باستخدام الاستدلال بالتبادل .

الواقع أن التضاد لا يصاغ رمزيا على أنه تكافؤ ، بل على أنه استدلال غير تبادلي (١) . وذلك لأنه حتى على الرغم من أن صدق إحدى القضيتين المتضادتين يستلزم كذب الأخرى ، فإن كذب إحداها لا يستلزم صدق الأخرى .

إذن فالاستدلال بين (1 = صفر) ، (س = 1) ، أو بين (س = 1) ، (1 = صفر) . ليس استدلالاً تبادلياً ، بل هو استدلال ذو اتجاه واحد فقط (هو اتجاه الصدق) ، ومن ثم فإن هذه القضايا ليست بالقضايا المتكافئة . أى أن الاستدلالتين التاليتين استدلالان خاطئان :

$$١ - (س \equiv ١) \supset (١ = صفر)$$

$$٢ - (١ = صفر) \supset (س \equiv ١) .$$

وعلينا هنا أن نلاحظ في هذا العدد أن القضيتين الكليتين المختلفتين في الكم مثل (كل ا هي ب) ، (لا ا هي ب) إذا ما فسرنا تفسيراً شرطياً (غير وجودي) (١) ، فلن نجد بينهما تقابلاً من أى نوع ، وبشكل أكثر تحصيلاً ، لن نجد بينهما تقابلاً بالتضاد . فهما قد تكذبان معاً - كما هو معروف من قاعدة التقابل - لكنهما قد تصدقان معاً كذلك ، إذا كانت الفئة ا فئة فارغة خالية من المصادقات . وعلى ذلك فحين تكون هاتان الفئتان ، وجوديتين ، أى تعبران عن وجود أعضاء في الفئة ا ، يكون الاستدلالات التالية صحيحة :

$$١ - (١ \neq صفر \supset (١ = صفر) .$$

$$٢ - (١ = صفر \supset (١ \neq صفر) .$$

ثانياً : الاستدلالات القائمة على الدخول تحت التضاد :

إن القضيتين الداخلتين تحت التضاد ، بالرغم من أنهما قد تصدقان معاً ، إلا أن كذبهما معاً مستحيل . وبعبارة أخرى ، فإننا لا نستطيع من صدق إحداهما أن نستنتج كذب الأخرى لكننا نستطيع من كذب إحداهما الاستدلال على صدق الأخرى .

ومن المعروف في المنطق التقليدي أن الدخول تحت التضاد يكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين كيفاً . إلا أننا نلاحظ في منطق الفئات أن القضيتين (بعض ا

(١) Hypothetical (non-existential)

هي ب) ، (بعض ليس ب) لا ترتبطان بسلاقة الدخول تحت التضاد ، ما لم نقتصر ،
مقدما أن تكون الفئة فئة ذات أعضاء ، وفي مثل هذه الحالة يكون الاستدلالان
التاليان صحيحين :

$$١ - [(ا ب \neq \text{صفر}) \cdot (ا \neq \text{صفر})] \supset (ا \neq \text{صفر})$$

$$٢ - [(ا ب \neq \text{صفر}) \cdot (ا \neq \text{صفر})] \supset (ا \neq \text{صفر})$$

أما لو بدأنا بصدق (ا ب \neq \text{صفر}) ، فإن كذب (ا ب \neq \text{صفر}) لن يكون
مؤكدًا ، وكذا لو بدأنا بصدق (ا ب \neq \text{صفر}) ، فإن كذب (ا ب \neq \text{صفر})
لن يكون مؤكدًا ، وفي كلتا الحالتين لن يكون الاستدلال صحيحًا .

ثالثا : الاستدلالات القائمة على التداخل :

إن الصياغة البديلة للاستدلال القائم على الدخول تحت التضاد ، يمكن أن نستفيد فيها
من مبدأ التناقض . لأن نفي القضية الجزئية — الموجبة أو السالبة — يكافئ بالتناقض
إثبات القضية الكلية — السالبة أو الموجبة — على الترتيب . وهكذا فإن نفي القضايا
الجزئية في الاستدلالات القائمة على الدخول تحت التضاد ، ينتهي بنا ، إذا وضعنا بدلا
منهما ما يكافئهما ، إلى الاستدلالتين الصحيحتين التاليين :

$$١ - (ا ب = \text{صفر} \cdot ا \neq \text{صفر}) \supset (ا \neq \text{صفر})$$

$$٢ - (ا ب = \text{صفر} \cdot ا \neq \text{صفر}) \supset (ا \neq \text{صفر})$$

هكذا استطعنا بتحليل الاستدلالات القائمة على أساس من التقابل ، حينما تصاغ
رمزياً ، أن نكشف عما هو مركب منها أو بسيط . فالاستدلالات المحتوية على
تناقض هي استدلالات بسيطة ، أما الاستدلالات القائمة على التضاد أو الدخول تحت
(م ٨ - أسس المنطق الرمزي)

التضاد أو التداخل ، فهي كما رأينا استدلالات مركبة ، لأن مقدماتها تعبيرات عطفية ،
تعطف مقدمتين أو أكثر .

أنواع الاستدلالات للركبة :

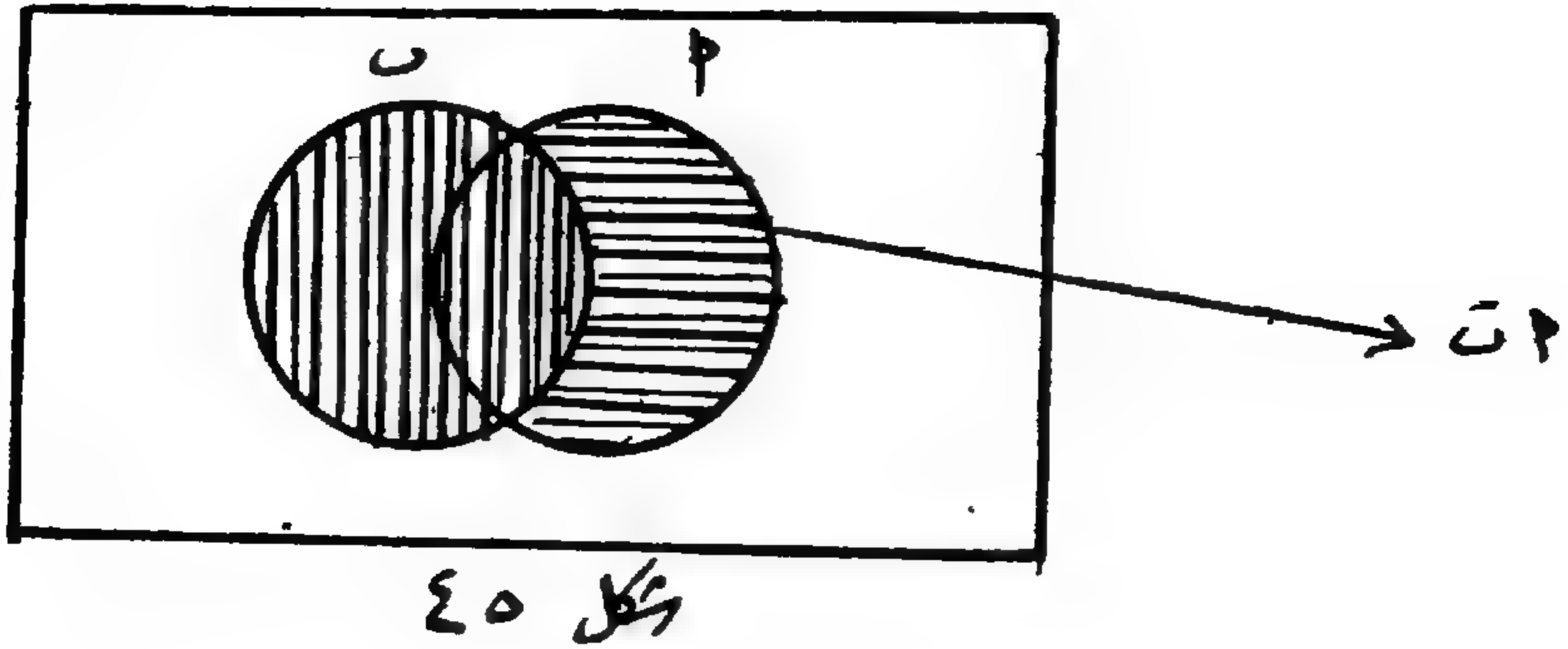
الاستدلالات المركبة تنقسم إلى قسمين أساسيين ، إستدلالات خالصة Pure وهي
التي تكون قضاياها من كم واحد ، واستدلالات مختلطة mixed وهي التي تحتوي
على قضايا مختلفة الكم .

أولا : الاستدلالات المركبة الخالصة : (١)

١ — لو كانت لدينا الصيغة الرمزية التالية لاستدلال خالص :

$$(A \supset B \cdot B \supset C) \supset A \supset C$$

وأردنا أن نتبين ما إذا كان الاستدلال صحيحاً أو غير صحيح ، باستخدام
شكل قن ، فإننا نقوم بإدخال اللقدمات الخاصة بالاستدلال على شكل قن ، فإذا
كانت نتيجة الاستدلال بعد ذلك ، واضحة في الشكل ، كان الاستدلال صحيحاً ،
وإلا لم يكن كذلك . وذلك استناداً إلى ما عرفناه من قبل ، من أن الاستدلال
الصحيح يكون هو ذلك الذي تلزم فيه النتيجة بالضرورة عن اللقدمات . وفيما يلي
الشكل الذي أدخلنا عليه اللقدمتين في الاستدلال السابق ، والذي يكشف عن ضرورة
لزوم النتيجة عن هاتين اللقدمتين :



(وقد ظلمنا في الشكل السابق ، الفئتين الفارغتين على نحوين مختلفين ،
إحداها وهي (ب) بالخطوط الرأسية ، والأخرى وهي (ا ب̄) بالخطوط الأفقية ،
للتمييز بينهما) . وهكذا نلاحظ من الشكل — لأول وهلة — إن تلك القدمتين
(ا ب̄ = صفر) ، (ب = صفر) ضروريان للوصول إلى النتيجة (ا = صفر)
وكذا أن النتيجة حاضرة وموجودة في الشكل . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

هذا ويمكن البرهنة — بدون استخدام الشكل — على صحة هـ — إذا
الاستدلال ، على النحو الآتي :

$$\therefore ب = \text{صفر} \text{ (فرضاً) } \quad \therefore ب̄ \neq \text{صفر}$$

$$، \quad \therefore ا ب̄ = \text{صفر} \text{ (فرضاً) }$$

$$، \quad \therefore ب̄ \neq \text{صفر}$$

$\therefore ا = \text{صفر}$ وهو المطلوب . (وقد يكون هذا البرهان

أكثر وضوحاً لو قلنا : إذا كانت (كل ا هي ب) ، وكانت ب = صفر ،

كانت إذن ا = صفر ، طالما أن الفئة ا تنتمي إلى الفئة ب ، وأن الفئة

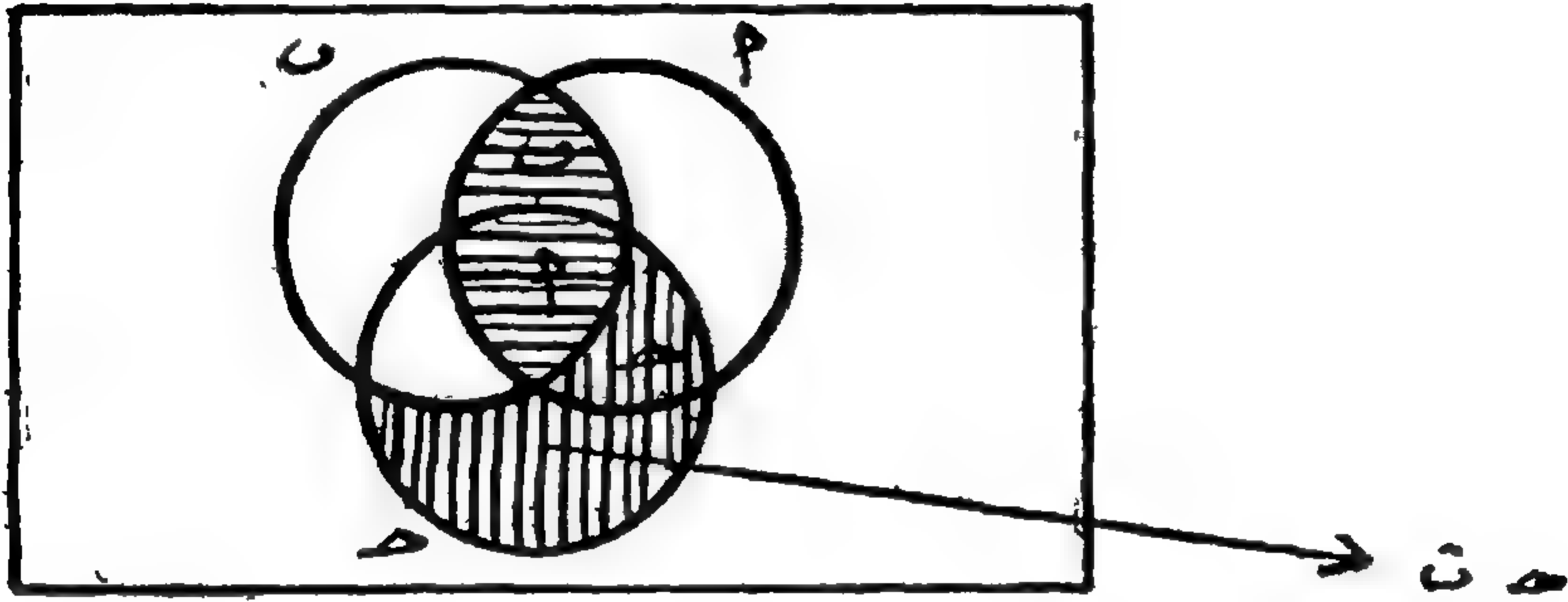
ب = صفر .

٢ — لو كان لدينا استدلال يحتوي على ثلاث فئات لا فئتين فقط مثل :

$$(a = b \cdot b = c \Rightarrow a = c) \text{ (صفر = صفر)}$$

وأردنا أن نثبت من صحته باستخدام شكل قن ، فإننا نقوم بإدخال المقدمتين

على الشكل فنحصل على :



شكل ٤٦

في هذا الشكل نلاحظ أن النتيجة وهي ($a = c$) حاضرة وموجودة بالفعل ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٣ — ولناخذ مثلاً آخر لاستدلال صحيح ، فيه النتيجة لازمة عن

المقدمتين :

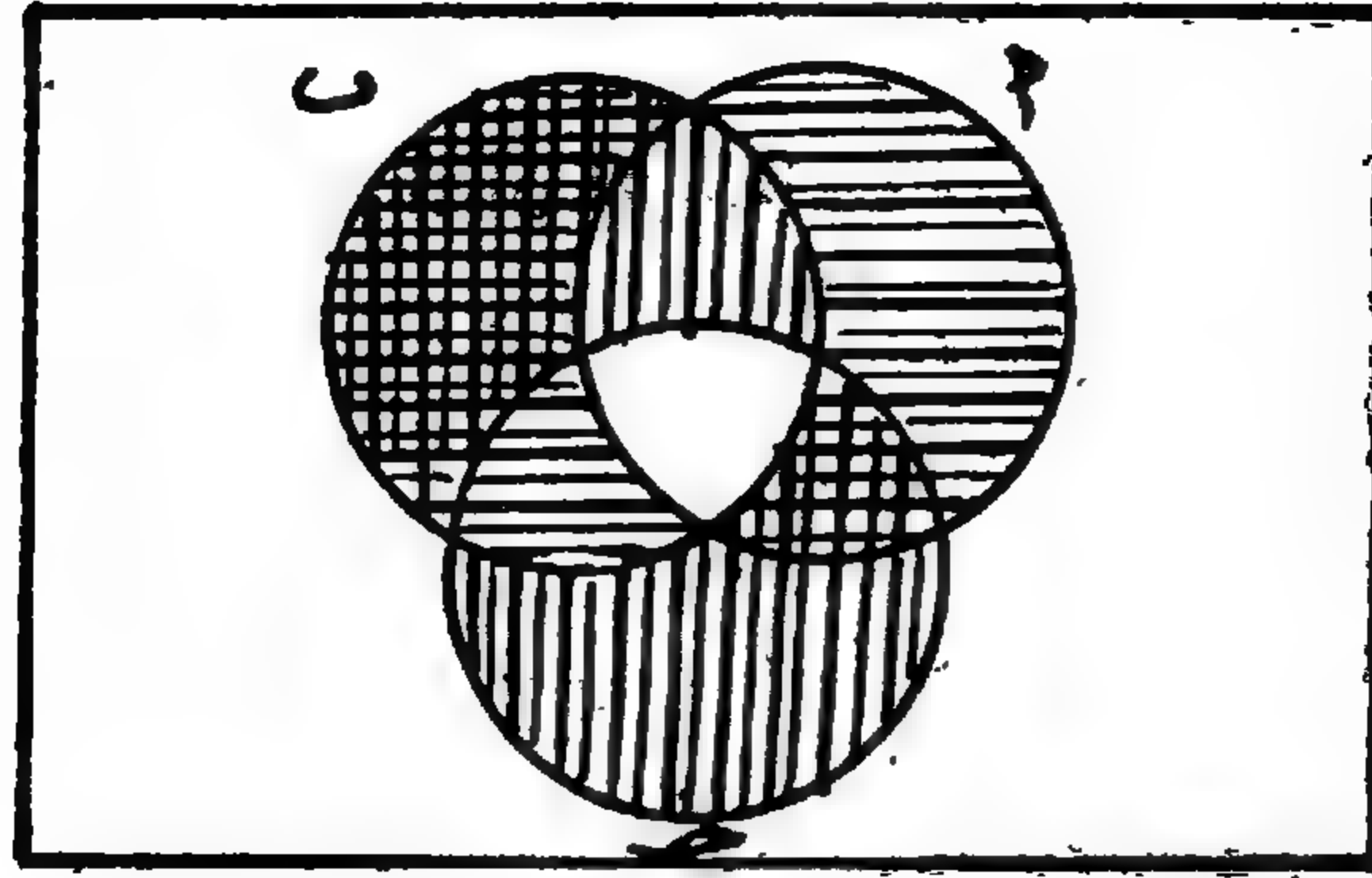
$$(a = b \cdot b = c \Rightarrow a = c)$$

وهذا ما يمكن التعبير عنه بالصيغة الرمزية المكافئة التالية :

$$(a = b \cdot b = c \Rightarrow a = c) \text{ (صفر = صفر)}$$

$$\Rightarrow (a = c \Rightarrow a = c) \text{ (صفر = صفر)}$$

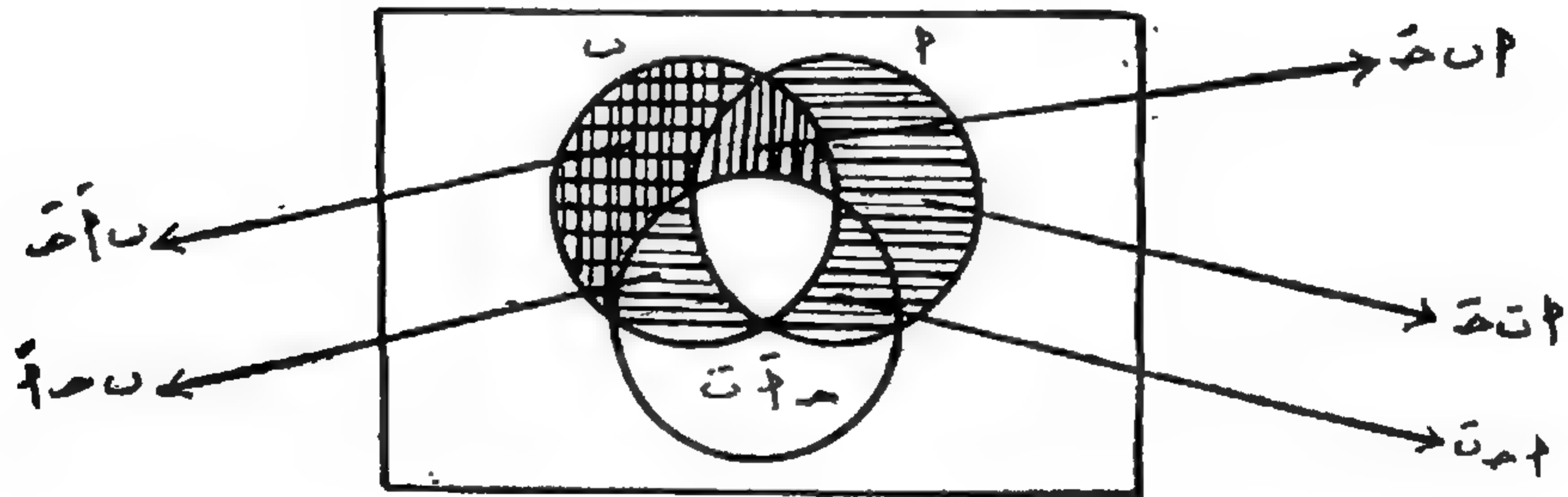
النحو الآتي :



شكل ٤٧

٤ — فإذا فرضنا أن المقدمة الثانية في المثال السابق ($C = P$) تفسر
لا على أنها قضية تعبر عن تطابق بين الفئات (١) ، إنما على أنها قضية تعبر عن التضمن
بين الفئات (٢) ، فتكون الصياغة الرمزية ، وكذا الشكل الخاص بهذا
الاستدلال ، على النحو الآتي :

$$C = P \quad (C = 1, P = 0)$$



شكل ٤٨

نلاحظ في هذه الحالة أن الاستدلال غير صحيح . لأنه كي تلزم النتيجة

(١) Coextensive - Class Proposition

(٢) Class - Inclusion Proposition

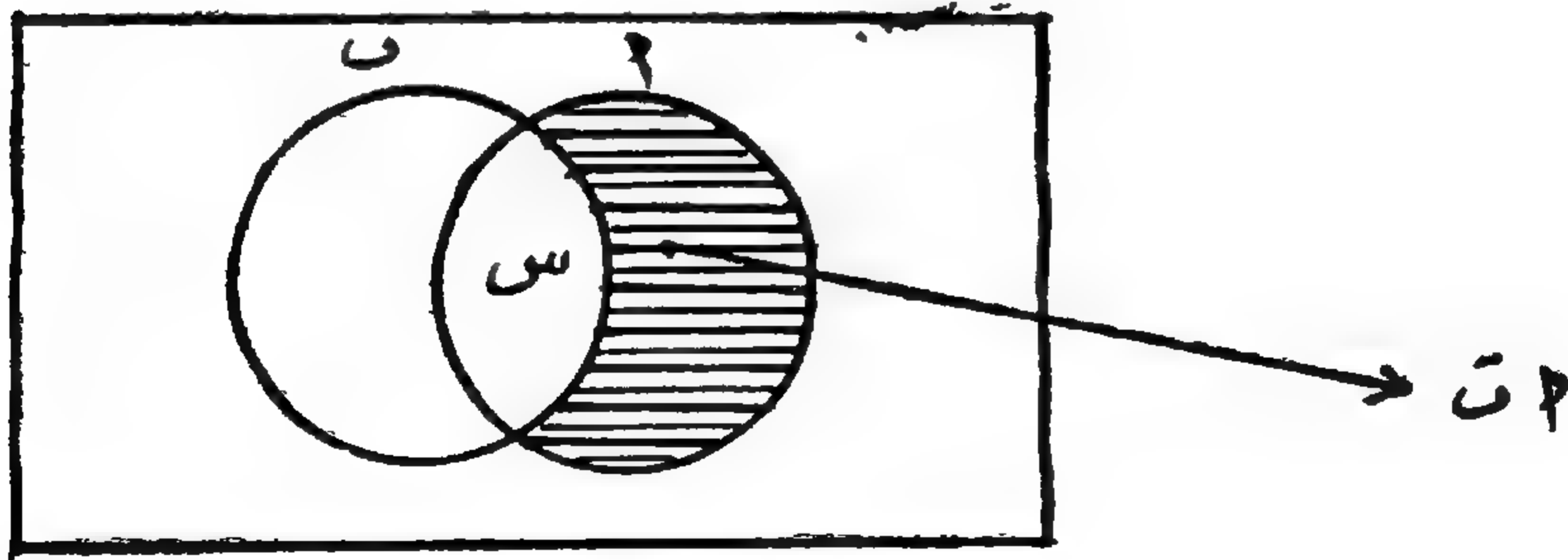
($\supset = 1$) عن القدمتين ، فلا بد وأن تكون الفئتان $\supset \bar{A}$ ، $\bar{A} \supset B$ معاً خاليتين من الأعضاء ، أو فارغتين (أو أن كلا منهما = صفر) . إلا أننا مع ذلك ، نرى في الشكل أن الفئة $\bar{A} \supset B$ ، فئة فارغة جزئياً في القدمتين (لأن $\bar{A} \supset B$ في الشكل السابق = $\bar{A} \supset B + \bar{A} \supset \bar{B}$ ، ولأن الفئة $\bar{A} \supset \bar{B}$ = صفر) في حين أن الفئة الأولى ($\bar{A} \supset B$) من الممكن أن تحتوى على أعضاء طالما أننا لم نذكر عنها في القدمتين إنها مساوية للصفر . وهذا الإمكان أو الاحتمال وحده يجعل الاستدلال غير صحيح ، طالما أن مقدمتيه قد تكونا صادقيتين في حين قد تكون نتيجته كاذبة .

ثانياً : الاستدلالات المركبة المختلطة : (١)

١ - استدلالات تحتوى على قضايا مفردة ، مثل :

$$(S \equiv A \cdot A \supset B \text{ صفر}) \supset S \equiv B$$

والبرهنة على صحة هذا الاستدلال تقوم بإدخال للقدمتين على شكل فن ،
فمحصل على :



شكل ٤٩

من الشكل السابق نلاحظ أن النتيجة حاضرة وموجودة ، وهي أن

(س \equiv ب) . وعلى ذلك فالنتيجة قد لُزمت عن القدمتين حال إدخالهما على الشكل . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

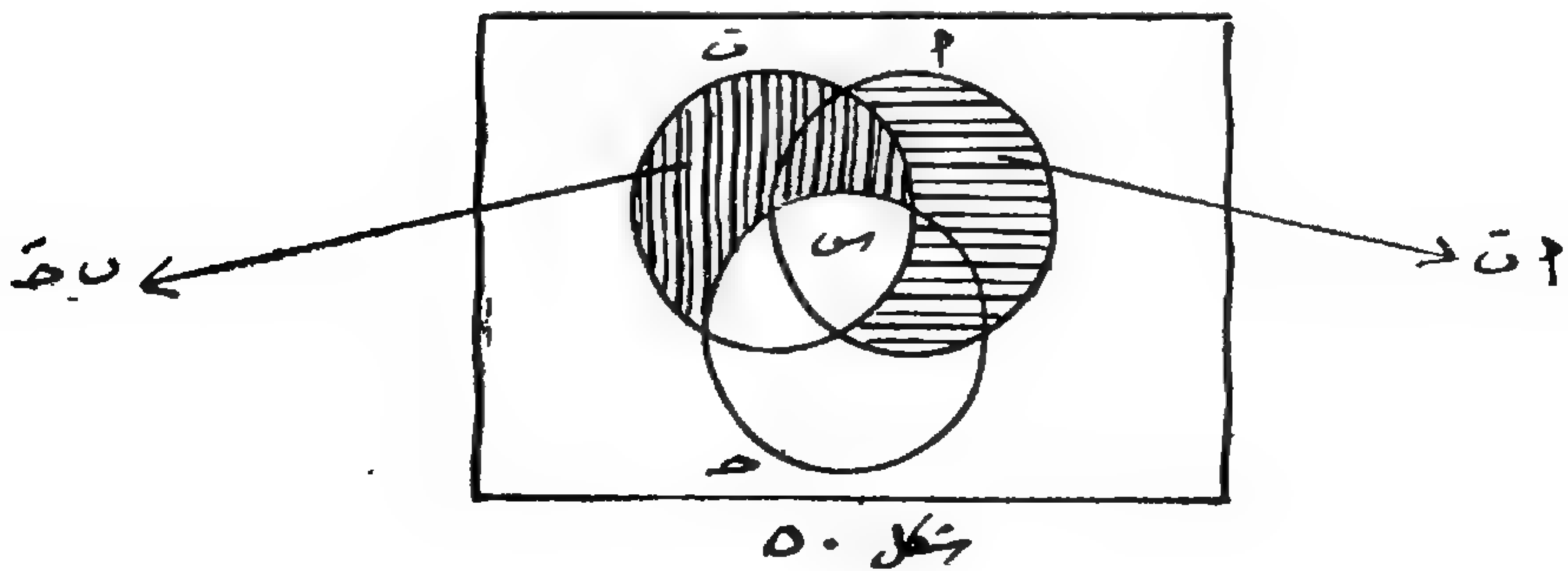
هذا ويمكن البرهنة بطريقة أخرى لو استخدمنا الصيغة التالية : [إذا كانت (س \equiv ا) ، وكانت (كل ا هي ب) ، كانت إذن (س \equiv ب)] .
 وقرأة : إذا كانت س عضواً في الفئة ا ، وكانت الفئة ا متممة إلى الفئة ب ، كانت إذن س عضواً في الفئة ب .

ملحوظة : علينا ، حين نقوم — في حالة الاستدلالات المختلطة — بإدخال المقدمات على شكل فن ، أن نراعى إدخال القضية الكلية أولاً . قبل إدخال القضية للفردة أو القضية الجزئية .

٢ — ولناخذ المثل التالي لاستدلال يتضمن ثلاث فئات :

$$(ا \equiv ب \equiv ح) \text{ صفر} . س (ا \equiv ب) \text{ صفر} . س (س \equiv ح) \text{ صفر}$$

فاذا أردنا أن تبين صحة هذا الاستدلال ، فائنا نقوم بإدخال مقدماته شكل فن على النحو الآتي :



في هذه الحالة نلاحظ مباشرة حضور النتيجة (س \equiv ح) ووجودها في الشكل ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

هذا ويمكن أن تتضح صحة الاستدلال إذا ترجمناه إلى صيغة أخرى هي : إذا كانت (كل ا هي ب) وكانت (كل ب هي ح) ، وإذا كانت س (\equiv ا) ، كانت إذن (س \equiv ح) . وتقرأ :

إذا كانت الفئة ا تنتمي إلى ب ، وكانت الفئة ب تنتمي إلى الفئة ح ، وكانت س عضواً في الفئة ا ، كانت إذن س ، عضواً في الفئة ح بالضرورة .

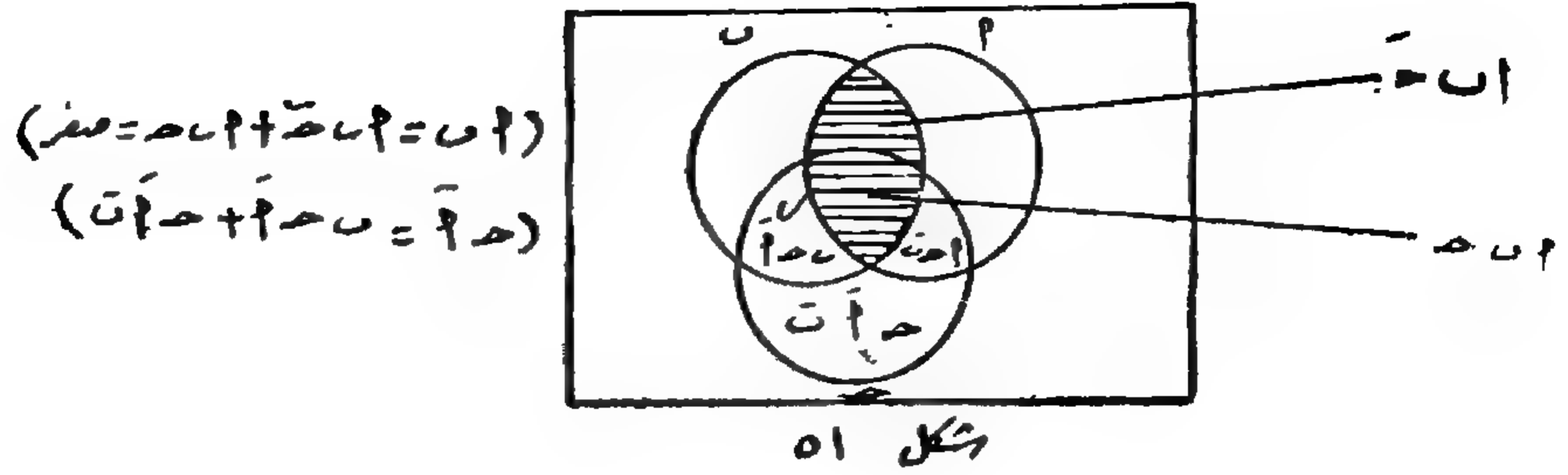
(ب) استدلالات تحتوى على قضايا جزئية :

١ — لو أردنا أن تبين مدى صحة الاستدلال التالي مثلاً :

$$(ا = صفر . ب ح \neq صفر) \Rightarrow ح ا \neq صفر$$

الواقع أن الصياغة الرمزية السابقة للاستدلال تكشف عن صحته ، أى عن لزوم النتيجة عن المقدمتين . كما تتضح صحة هذا الاستدلال بصفة خاصة ، لو أعدنا صياغة الاستدلال على النحو الآتى : إذا كانت (لا ا هي ب) ، وكانت (بعض ب هي ح) ، كانت إذن (بعض ح ليس ا) .^(١) كما تتضح صحة هذا الاستدلال كذلك من الشكل التالي :

(١) وهو قياس من الضرب Fresison من الشكل الرابع وقد وضعناه على شكل استدلال لزوي أو شرطى .



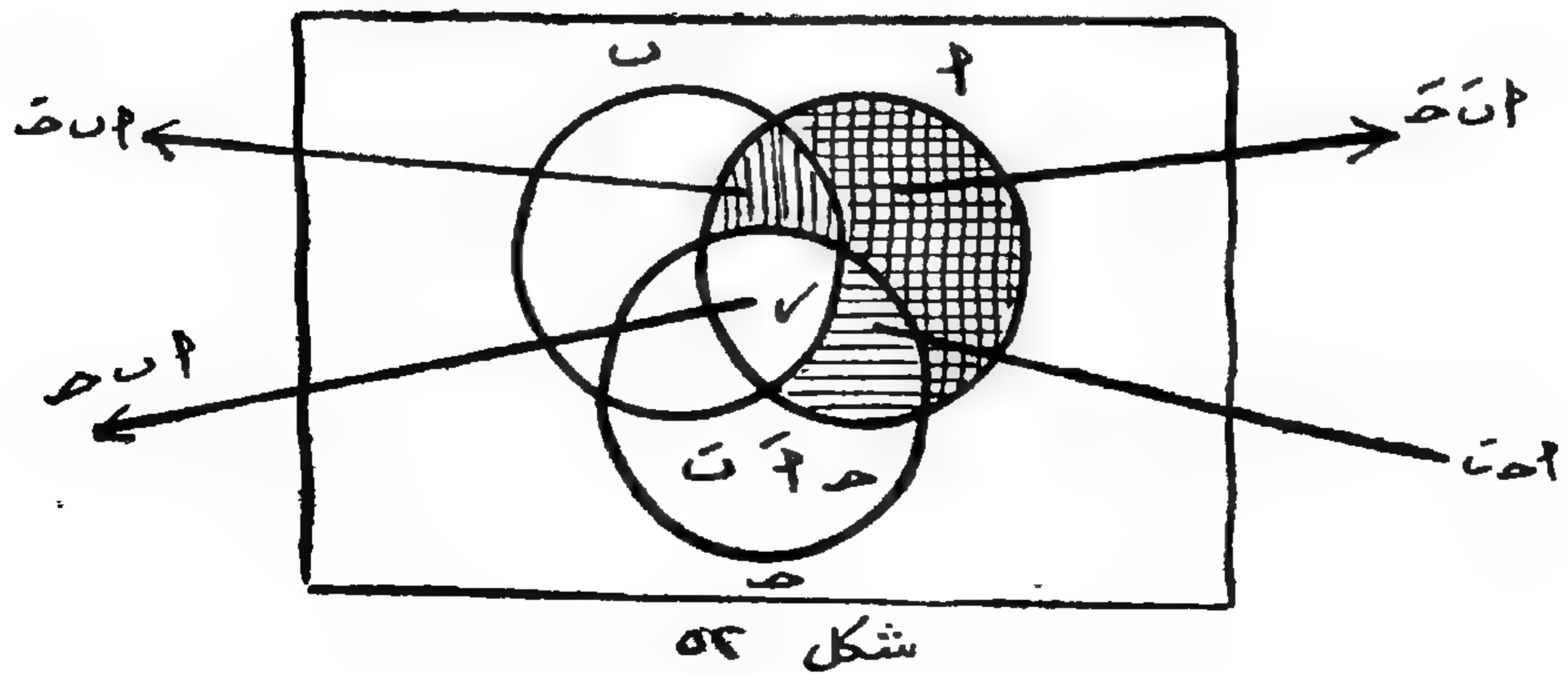
ويمكن توضيح ذلك الشكل على النحو الآتي :

أن $(U \cap P = U \cap H + P \cap H)$. وبما أن إحدى الفئتين التي تتكون منهما الفئة $U \cap P$ ، وهي الفئة $(U \cap H)$ لا تساوي الصفر ، إذن فمن الأولى أن تكون الفئة $U \cap P$ ، هي بدورها ، لا تساوي الصفر ، وهو المطلوب .

٢ — ولنفرض أن لدينا الاستدلال التالي :

$$(U \cap P = U \cap H + P \cap H) \text{ صفر } \neq \text{ صفر } \neq \text{ صفر}$$

فإذا ما أردنا أن نتثبت من صحته ، قمنا بادخال مقدماته على شكل فن ، لكي نرى ما إذا كانت النتيجة حاضرة في الشكل أم لا . وذلك على النحو الآتي :



ويمكن البرهنة على صحة ذلك كما يلي :

$$٦. \quad a\bar{b} = \text{صفر} \quad (\text{فرضاً})$$

$$٦. \quad \bar{a}b = \text{صفر} \quad (\text{فرضاً})$$

∴ ينتج عن هذا (في الشكل) أن: $a\bar{b} = \text{صفر}$. وأن: $\bar{a}b = \text{صفر}$

$$٦. \quad \bar{a}b \neq \text{صفر} \quad (\text{فرضاً})$$

$$٦. \quad a\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} + \bar{a}b = 1$$

٦. ∴ كلا من الفئات الثلاث الأولى التي تتكون منها الفته 1 ، هي مساوية للصفر .

∴ فالجزء الباقي منها ، وهو $(a\bar{b})$ لا يساوي الصفر .

$$∴ a\bar{b} \neq \text{صفر}.$$

$$٦. \quad a\bar{b} + \bar{a}b = a\bar{b}$$

$$٦. \quad \text{إحدى هاتين الفئتين ، وهي } (a\bar{b}) \neq \text{صفر}$$

$$∴ \text{فإن } a\bar{b} \neq \text{صفر} \quad \text{وهو المطلوب}$$

ثانياً : الاختبار الرمزي الموسع للاستدلالات الخاصة بقضايا الفئات (١)

وهي الطريقة التي نلجأ إليها حين يتعذر علينا ، أو حين نجد صعوبة كبيرة في

معرفة صحة الاستدلالات باستخدام شكل فن . وسنحاول فيما يلي تطبيق هذه الطريقة بالنسبة لنوعى الاستدلالات الخاصة والمختلطة ، وذلك كما يلي : —

(١) الاستدلالات الخاصة :

١ — لنفرض أن لدينا إستدلالا مركبا خالصا ، ياخذ الصيغة التالية : —

(كل ا هي ب ، كل ب هي ح . إذن فكل ا هي ح)

التي يمكن التعبير عنها رمزيا على النحو الآتي : —

$$(ا ب = صفر . ب ح = صفر) \Rightarrow ا ح = صفر .$$

بتأملنا هذا الاستدلال ، نلاحظ أنه يحتوي على ثلاثة حدود خاصة بالفئات هي : ا ، ب ، ح وإن واحدا من هذه الحدود محذوف في كل مقدمة من المقدمتين، وكذا في النتيجة . وبما أننا نعرف أن نتيجة الاستدلال الصحيح تكون لازمة بالضرورة عما تخبر به المقدمات ، فيبدو أننا لو وضعنا كل قضية من هذه القضايا الثلاث لكي تحتوي على الحد المحذوف ، لاستطعنا أن نقارن بسهولة أكثر بين المقدمتين والنتيجة ومن ثم نستطيع تحديد ما إذا كانت المقدمات تكفي لإنتاج النتيجة أو ما إذا كانت النتيجة تلزم بالضرورة عن المقدمات .

وفما يلي الطريقة التي سوف نتبعها ، لإدخال أى حد على العبارة الرمزية لقضية ما ، بدون أن تغير من معناها :

أولا علينا أن نذكر القانون القائل بأن : $(١ \times ١ = ١)$ وهو الذى يفيد أن أية فئة مثل ا ، تكون متطابقة مع حاصل ضرب الفئة ذاتها في الفئة الشاملة

(أو عالم للقال) : فإذا ما طبقنا ذلك على الاستدلال الذى نحن بصدده ، فإننا ننتهى إلى أن المقدمة الأولى فى الاستدلال وهى ($أ = صفر$) ، يمكن أن تصبح ($أ = ١ \times صفر$) ، طالما أن ($أ = ١ \times أ$) ، بدون أن يتغير معناها . وبما أن الفئة الشاملة — تكون مطابقة لأية فئة والفئة المكمل لها ، وبما أننا نود إدخال الفئة ح على المقدمة الأولى ، وبما أن ($ح + ح = ١$) ، فإننا نكتب المقدمة الأولى كما يلى : —

$$[أ = (ح + ح) صفر]$$

وكخطوة أخيرة ، فإننا نقوم بفك الأقواس ، أو بعبارة أخرى نقوم بتطبيق أحد قوانين الاستغراق ، فنحصل على ما يمكن أن نسميه بالصيغة الموسعة expanded للمقدمة الأولى وهى :

$$أ = ح + أ = صفر .$$

والواقع أن معنى هذه الصيغة الموسعة ، هو نفسه معنى الصيغة الأصلية ($أ = صفر$) ، والفرق بينهما فى الصياغة هو مجرد إدخال الفئة ح فى الصيغة الجديدة .

الآن ، هل أصبح فى استطاعتنا تحديد ما إذا كان الاستدلال صحيحاً أم لا ؟ لا ، فنحن لا زلنا غير قادرين على تحديد صحة الاستدلال ، حتى يتم توسيع المقدمة الأخرى أيضاً . ويمكن توسيع المقدمة الثانية ، خطوة ، خطوة ، بإدخال الحد المخفض فيها وهو (أ) ، بنفس الطريقة السابقة ، وذلك كما يلى : —

$$١ - \bar{a}b = \text{صفر} \quad (\text{المقدمة الثانية})$$

$$٢ - \bar{a}b \times ١ = \text{صفر} \quad [\text{وذلك بوضع } (\bar{a}b) \text{ بدلا من } (١) \text{ في } (١ = ١ \times ١)]$$

$$٣ - \bar{a}(١ + \bar{a}) = \text{صفر} \quad (\text{بما أن } ١ + \bar{a} = ١ \text{ ، قانون الوسط المرفوع})$$

$$٤ - \bar{a}b + \bar{a}^2 = \text{صفر} \quad [\text{بوضع } (\bar{a}b) \text{ بدلا من } (١) \text{ ، } (١) \text{ بدلا من } (b) \text{ ، } (\bar{a}) \text{ بدلا من } (a) \text{ في قانون الاستغراق التالي : —}]$$

$$١ (a + b) = a + b$$

$$٥ - \bar{a}b + \bar{a}^2 = \text{صفر} \quad (\text{باستخدام قانون التبادل})$$

والواقع أن اتخاذ الخطوة الأخيرة يساعدنا كثيرا في ترتيب الحدود أو المتغيرات على نحو يسمح بمقد المقارنة بين هذه المقدمة والمقدمة الأولى .

بقي بعد ذلك توسيع النتيجة أيضا ، لكي تكون محتوية على الحد المحذوف وهو (b) ، كما يلي : —

$$١ - \bar{a} = \text{صفر} \quad (\text{النتيجة})$$

$$٢ - \bar{a} \times ١ = \text{صفر} .$$

$$٣ - \bar{a}(b + \bar{b}) = \text{صفر} . \quad (\text{بما أن } b + \bar{b} = ١)$$

$$٤ - \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} = \text{صفر} .$$

$$٥ - \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} = \text{صفر} .$$

هكذا نكون قد وسعنا جميع قضايا الاستدلال السابق ، بحيث أصبحت جميعا
شاملة لكل المتغيرات الواردة في الاستدلال .

الخطوة التالية لهذا ، هي أن نختبر الاستدلال كله ، وذلك بان نشطب كل فئة
من الفئات الواردة في النتيجة ، إذا كانت قد وردت من قبل في المقدمات على أنها
فئة فارغة لا أعضاء لها ، أو مساوية للصفر . وهكذا يكون الاستدلال الذي عبرنا
عنه رمزيا هنا استدلالا صحيحا ، فقط إذا كانت جميع الفئات الواردة في نتيجة ،
فئات فارغة ، أى فئات تم حذفها ، طالما إن المقدمتين أثبتتا أنها فارغة . ويمكن
توضيح ذلك على النحو الآتي : —

$$\left[(ab + a\bar{b} = \text{صفر}) \cdot (ab + a\bar{b} = \text{صفر}) \right] \\ ab + a\bar{b} = \text{صفر}$$

الآن نرى أن الاستدلال صحيح ، لأن المقدمة الأولى ، تجعل الفئة ($a\bar{b}$)
فئة فارغة ، أو تقرر أنها كذلك ، كما أن المقدمة الثانية ، تقرر أن الفئة
(ab) فئة فارغة أيضا . وهكذا فإن المقدمتين معا ، قد أحالنا الفئة الواردة
في النتيجة بأكملها إلى فئة فارغة ، ومن ثم يمكننا أن نقول عن الاستدلال انه
صحيح .

والواقع أننا لن نحتاج ، بعد قليل من اللران والتدريب (إلى ذكر كل هذه
الخطوات السابقة ، إذ سيكون من الواضح لدينا أن أى حاصل ضرب مثل ($a \times b$)
يمكن توسيعه مباشرة لكي يحتوي على أية فئة أخرى (مثل a) عن طريق إضافة
 $ab + a\bar{b}$ ، وذلك كما يلي : ($ab + a\bar{b}$) .

٢ — ولتأخذ لذلك التل الآتي : —

(كل A هي B ، لا A هي A . إذن لا A هي B)

فإذا عبرنا رمزيا عن الاستدلال ، حصلنا على :

$$(A \supset B = A \cdot A \supset B = \text{صفر})$$

وإذا ما وسعناه بطريقة مباشرة ، حصلنا على :

$$[(A \supset B + A \supset \bar{B} = \text{صفر}) \cdot (A \supset B + A \supset \bar{A} = \text{صفر})] \supset (A \supset B + A \supset \bar{A} = \text{صفر})$$

فإذا ما أعدنا ترتيب المتغيرات في المقدمة الثانية والنتيجة حصلنا على :

$$[(A \supset \bar{A} + A \supset \bar{B} = \text{صفر}) \cdot (A \supset \bar{A} + A \supset B = \text{صفر})] \supset (A \supset \bar{A} + A \supset B = \text{صفر})$$

الآن بعد توسيع الصيغة الرمزية للاستدلال ، هل امتنعنا أن ندين صحتها ؟

الواقع أن الاختبار الدقيق لثل هذا الاستدلال يظهر أنه غير صحيح . حقا إن الفئة $(A \supset B)$ الواردة في النتيجة قد وردت في المقدمة الثانية على أنها فئة فارغة . إلا أن الفئة المتبقية في النتيجة لم يرد ذكرها في المقدمتين . وحيث أننا لا نستطيع أن نعرف من المقدمتين ما إذا كانت هذه الفئة ذات أعضاء أم لا ، فإن النتيجة بهذا الشكل لا تلزم عن المقدمتين ، ومن ثم فلا استدلال غير صحيح .

(ب) الاستدلالات المختلطة :

١ — لنأخذ المثال الآتي ، وهو استدلال يحتوى على قضايا كلية وجزئية معا .

(كل a هي b . بعض a هي c . إذن بعض c هي b)

فإذا ما عبرنا عن هذا الاستدلال رمزيا لحصلنا على . —

$$(a \supset b \text{ . } a \neq \text{صفر} \supset b \neq \text{صفر})$$

فإذا ما وسعناه بطريقة مباشرة لحصلنا على : —

$$[(a \supset b + a \supset \text{صفر}) . (a \neq \text{صفر} + a \supset b \neq \text{صفر})] \supset (a \supset b + a \supset \text{صفر})$$

فإذا رتبنا المتغيرات فيه حصلنا على : —

$$[(a \supset b + a \supset \text{صفر}) . (a \neq \text{صفر} + a \supset b \neq \text{صفر})] \supset (a \supset b + a \supset \text{صفر})$$

ولقد شطبنا الفئة $(a \supset b)$ الواردة في المقدمة الجزئية ، وذلك لإظهار أنها — واحدة من الفئات التي أثبتت المقدمة الأولى الكلية أنها فارغة أو مساوية للصفر . وهذا يعني أن الفئة الأولى في المقدمة الثانية $(a \supset b)$ لا تكون مساوية للصفر ، أو ليست فارغة ، أي ذات أعضاء . وبما أن هذه الفئة ذات أعضاء في المقدمة الثانية فهي كذلك ذات أعضاء في النتيجة . ومن ثم يتبع عن ذلك ، بطريقة أكثر فصولا أن تكون الفئة $(a \supset b + a \supset \text{صفر})$ هي فئة ذات أعضاء . وهكذا فإن النتيجة تكون قد ثُبتت لزوما ضروريا عن المقدمتين ، ومن ثم فالاستدلال صحيح

٢ — لو كان لدينا الاستدلال المختلط التالي الذى يحتوى على قضايا مفردة :

(لا ا هي ب ٦ س هي ا . إذن س ليست هي ب) .

نلاحظ أن مثل هذا الاستدلال ، لا يتضمن إلا فئتين فقط هما ا ، ب . وبما أن المقدمة الكلية تشير بالفعل إلى هاتين الفئتين ، فإننا لن نحتاج إلا إلى توسيع المقدمة المفردة فقط ، وكذلك النتيجة . ومن ثم يكون تعبيرنا الرمزي عن الاستدلال كما يلي :

(ا ب = صفر . س (ا ≡) س (ب ≡) ب) .

كما تكون صيغته الموسعة على النحو الآتى :

[(ا ب = صفر) . س (ا ب + ا ب) ≡] س (ا ب + ا ب) ≡

فالفتة ا في المقدمة المفردة في هذا الاستدلال ، تم توسيعها لكي تحتوى على ب ، كما أن الفتة ب في النتيجة قد تم توسيعها لكي تشمل على ا . وبما أن المقدمة الكلية تخبرنا عن الفتة (ا ب) أنها فتة فارغة ، فإننا نشطبها (نحذفها) من المقدمة المفردة ، ومن ثم يصبح العضو المفرد (س) متضمنا في الفتة ا ب (طالما أن ا ب = صفر) .

لكن إذا كان (س) متنيا إلى الفتة ا ب ، فهو سيكون كذلك متنيا إلى الفتة الأكثر شمولا وهي (ا ب + ا ب) . ويترتب على ذلك لزوم النتيجة عن المقدمتين ، ومن ثم فالاستدلال صحيح .

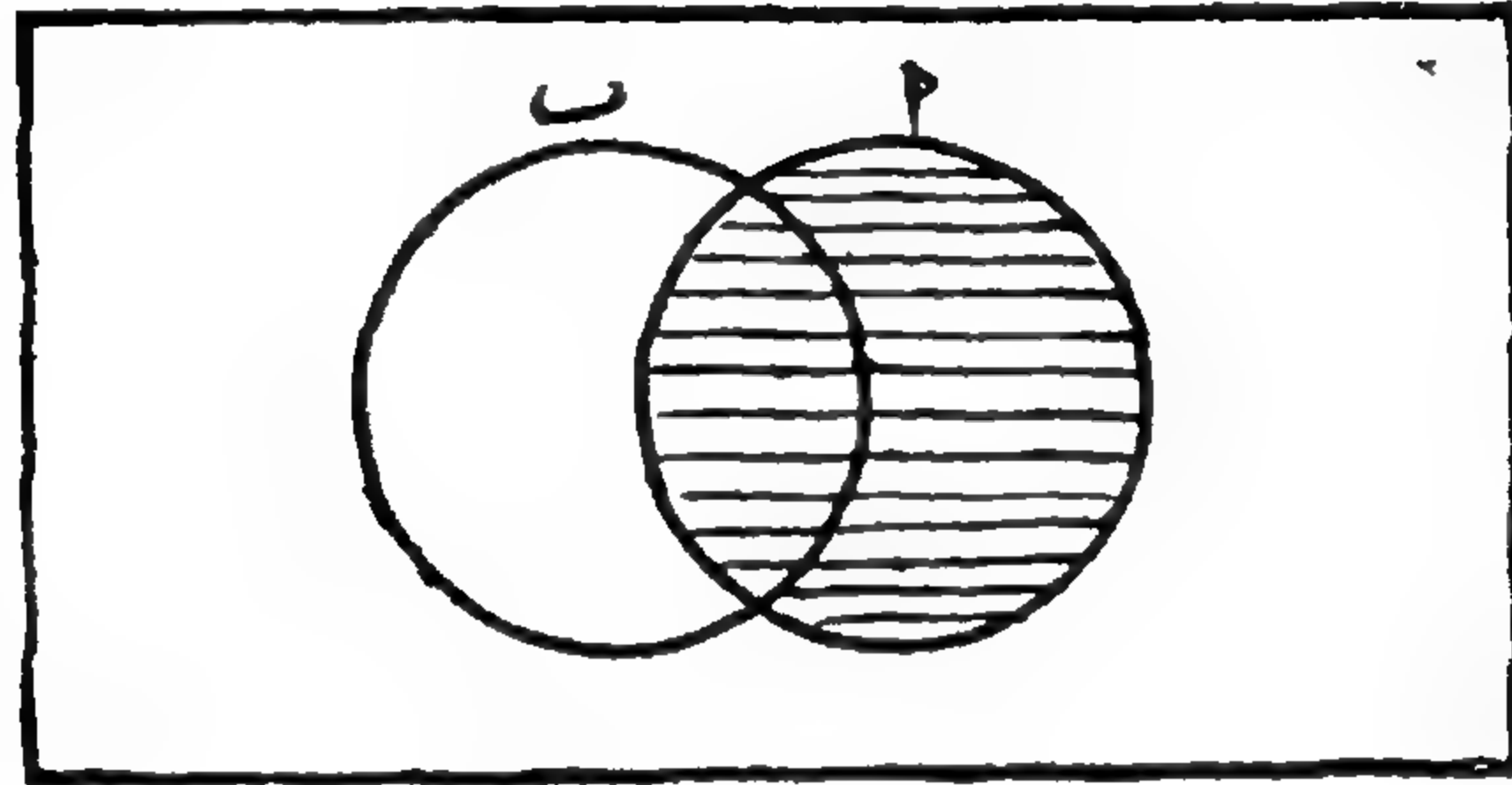
إختصار الاختبار الرمزي للموسع :

نحن عادة ما نقوم بتوسيع جميع القضايا الخاصة بالاستدلال في حالة الاختبار الرمزي الموسع (باستثناء المثال الأخير) ، مع أننا قد لا نكون في حاجة إلى توسيع (م ٩ — أسس المنطق الرمزي)

جميع القضايا ، بل قضية واحدة أو قضيتين . ومن ثم فإننا نلجأ أحيانا إلى اختصار هذه الطريقة الموسعة ، وذلك بالاختصار على توسيع القضايا التي نحتاج إلى توسيعها فقط . وسنستخدم في هذه الحالة ، بعض أو كل القوانين الثلاثة التالية :

$$(١) \quad ١ = \text{صفر} \mid \text{صفر} = ١$$

ويمكن إظهار صحة هذا الاستدلال بشكل فن كما يلي :

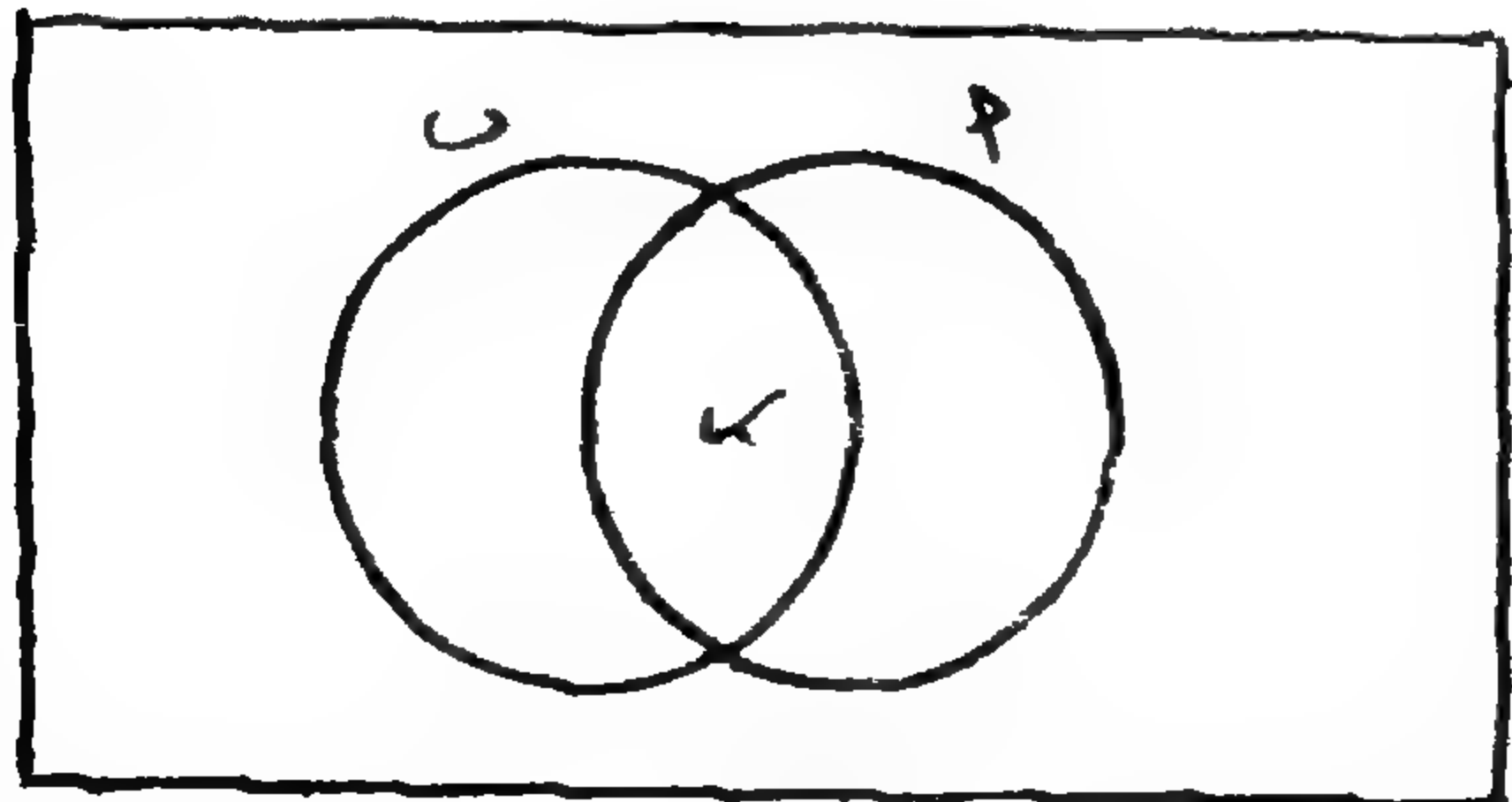


شكل ٥٣

$$(٢) \quad ١ \mid \text{صفر} \neq \text{صفر} \neq ١$$

(وكذلك : $١ \mid \text{صفر} \neq \text{صفر} \neq ١$) ، لأنه لو كانت $١ \mid \text{صفر} = \text{صفر}$ لكان حاصل ضرب إحداهما في الأخرى $= \text{صفر}$ دائماً .

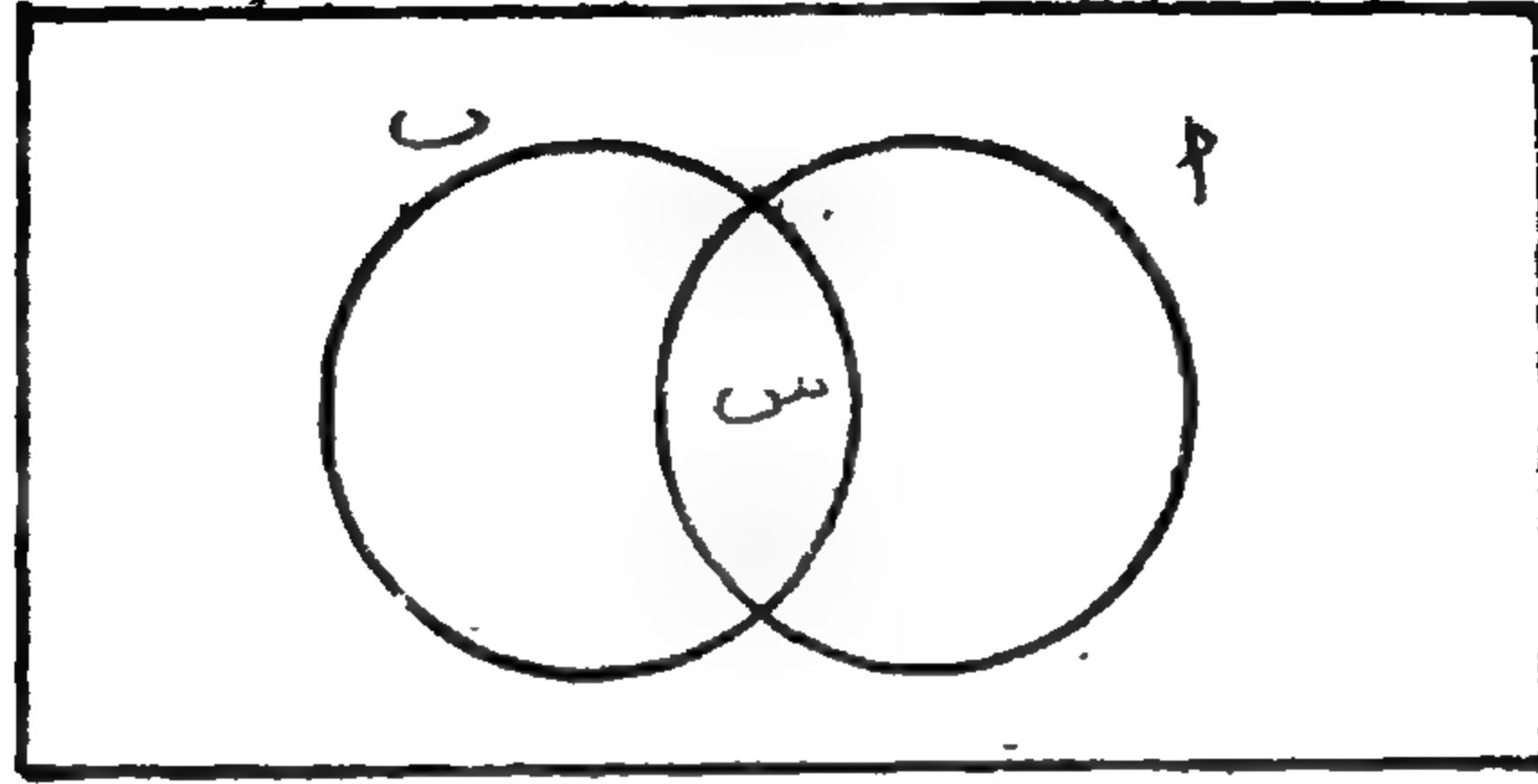
وهذا ما يتضح من الشكل الآتي : —



شكل ٥٤

(٣) $S \equiv A : B : S \equiv A$ (وكذلك : $S \equiv A : B : S$)
 $S \equiv B$.

وهذا ما تتضح صحته من الشكل التالي :



شكل ٥٥

وسنطبق فيما يلي هذه الطريقة المختصرة بالنسبة للاستدلالات الخاصة والمختلطة ،
 كما يلي :

(١) الاستدلالات الخاصة :

١- أن الاستدلال الكلي الخالص ، يمكن اختباره — لو أدخلنا في اعتبارنا
 القانون الأول من القوانين السابقة ، بتوسيع النتيجة فقط . وسأخذ لذلك مثلاً
الاستدلال التالي :

(كل A هي B ، وكل B هي C . إذن فكل A هي C)

الذي نعبر عنه رمزياً كما يلي :

$$(A = B . B = C) \Rightarrow A = C \text{ صفر} .$$

ثم نقوم بتوسيع النتيجة فيه على النحو الآتي :

$$(A = B . B = C) \Rightarrow (A = C + A = B + A = C) \text{ صفر}$$

وبما أننا نعرف أن الفئة ($1 \succ B$) الواردة في النتيجة هي جزء من الفئة ($B \succ$) التي تقول المقدمة الثانية أنها مساوية للصفر . وبما أننا نعرف أن الفئة ($1 \succ B$) الواردة في النتيجة هي جزء من الفئة ($1 \succ B$) التي تقول المقدمة الأولى أنها مساوية للصفر . وبما أننا نعرف كذلك أن أي جزء من فئة فارغة ، يكون هو أيضا فارغا مساويا للصفر . فإننا نستطيع حذف الفئتين الواردتين في النتيجة بناء على ما تقرره المقدمات من أنهما مساويتان للصفر . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٣ — ولنأخذ المثل التالي ، الذي يتضح من تطبيق هذه الطريقة المختصرة ،

أنه استدلال غير صحيح :

(كل A هي B ، كل B هي C . إذن كل A هي C)

الذي نعبر عنه رمزيا كما يلي :

($1 \succ B = \text{صفر} . B \succ C = \text{صفر}$) $\Rightarrow 1 \succ C = \text{صفر} .$

ثم نقوم بتوسيع نتيجة الاستدلال ، فنحصل على :

($1 \succ B = \text{صفر} . B \succ C = \text{صفر}$) $\Rightarrow 1 \succ B + B \succ C = 1 \succ C = \text{صفر}$

ثم نقوم بترتيب المتغيرات في الصيغة السابقة ، فنحصل على : -

($1 \succ B = \text{صفر} . B \succ C = \text{صفر}$) $\Rightarrow 1 \succ B + B \succ C = 1 \succ C = \text{صفر}$

في هذه الصيغة الأخيرة نلاحظ أن ما نتجربنا به المقدمة الثانية ، هو أن ($B \succ$) فئة مساوية للصفر ، أو فارغة . ومن ثم فإننا نستطيع حذف الفئة ($1 \succ B$) في النتيجة طالما أن الفئة الأخيرة جزء من الفئة ($B \succ$) المساوية للصفر . أما بالنسبة للجزء الثاني من النتيجة وهي الفئة ($1 \succ B$) ، فإننا لا نجد من بين الفئات الواردة في المقدمتين ما يثبت أنها مساوية للصفر . ومن ثم فالنتيجة لا تلزم بالضرورة عن المقدمات ومن ثم فالاستدلال صحيح .

ب — الاستدلالات المختلطة :

أما في حالة الاستدلالات المختلطة ، فإننا في الطريقة المختصرة لا نحتاج إلا إلى توسيع المقدمة الجزئية أو المقدمة للفردة فقط . وهذا ما يتضح من الأمثلة التالية :

١ — نفرض أن لدينا الاستدلال للفرد التالي .

(كل a هي b ، s هي a . إذن s هي b)

وأردنا أن نتثبت من صحته باستخدام الطريقة المختصرة ، فإننا نقوم بصياغته رمزيا كما يلي : —

($a \supset b = \text{صفر} . s \supset a \supset s \supset b$)

ثم نقوم بتوسيع المقدمة للفردة فيه ، فنحصل على :

($a \supset b = \text{صفر} . s \supset (a + \bar{a}) \supset s \supset b$)

يلاحظ في هذه القضية الموسعة أن المقدمة الكبرى ($a \supset b = \text{صفر}$) تثبت أن الفئة (a) فئة فارغة ، ومن ثم فإننا نشطبها أو نحذفها من المقدمة الموسعة طالما هي مساوية للصفر . وينتج عن ذلك أن العضو المفرد (s) يجب أن يكون متضمناً في الفئة (a) . وإذا كانت (s) عضواً في الفئة (a) ، فإنها تكون كذلك إذن — بناء على القانون ٣ سالف الذكر الذي ينص على أن : $s \supset a \supset b : \supset s \supset b$ أو $s \supset b$ (عضواً في أية فئة مثل b أو a ، التي تتضمن a ، ولذا فالنتيجة تكون قد لزمّت بطريقة صحيحة عن المقدمتين ومن ثم فلا استدلال صحيح .

٢ — ولتأخذ كذلك مثلاً لذلك الاستدلال الجزئي التالي :

(لا a هي b . بعض c هي a . إذن بعض c ليست b)

مرة أخرى ، فإننا نرمز لهذا الاستدلال كما يلي : —

($a \supset b = \text{صفر} . c \supset a \supset c \supset \bar{b} \neq \text{صفر}$)

ثم نقوم بتوسيع المقدمة التي تثبت عضوية الأفراد في الفئة (أى المقدمة الجزئية)
وهي المقدمة الثانية ، كما يلي :

$$[١ \text{ ب} = \text{صفر} . (\text{ح} \text{ ا} + \text{ح} \text{ ا} \text{ ب} \neq \text{صفر})] \quad (\text{ح} \text{ ب} \neq \text{صفر})$$

ثم نقوم بترتيب المتغيرات فنحصل على : —

$$[١ \text{ ا} = \text{صفر} . (\text{ا} \text{ ب} + \text{ا} \text{ ب} \text{ ح} \neq \text{صفر})] \quad (\text{ب} \text{ ح} \neq \text{صفر})$$

فإذا كانت (ا ب) فئة فارغة ، كانت إذن (ا ب ح) — التي هي من الفئة
(ا ب) فئة فارغة أيضا . وهذا يعنى أن الفئة (ا ب ح) فئة ذات أعضاء ، وليست
مساوية للصفر ، وهي تلك الصفة المتضمنة في الفئة (ب ح) وهكذا : إذا كانت
(ا ب ح) فئة ذات أعضاء ، فكذلك الفئة (ب ح) . ومن ثم فالإستدلال صحيح .

٣ — والواقع أن فائدة إستخدام الطريقة المختصرة للاختبار الرمزي الموسع ،
تنهض بصفة خاصة في حالة الإستدلالات المختلفة التي تلزم فيها نتيجة جزئية عن مقدمتين
أو أكثر من المقدمات الكلية . ولنأخذ لذلك مثلا الاستدلال التالي :

$$(\text{كل ا هي ب . لا ا هي ح} . \text{إذن بعض ب ليس ح})$$

ولنعبر عن ذلك الاستدلال تعبيراً رمزياً كما يلي :

$$(١ \text{ ب} = \text{صفر} . ١ \text{ ح} = \text{صفر}) \quad (\text{ب} \text{ ح} \neq \text{صفر})$$

كيف يمكن في هذه الحالة توسيع الاستدلال بطريقة مختصرة ؟ .

إننا نعرف أن النتيجة الجزئية لا يمكن إستنتاجها من المقدمات الكلية، إلا إذا
كانت إحدى المقدمتين على الأقل ، قضية وجودية . فإذا افترضنا مثلا أن ا فئة ذات
أعضاء ، أصبحت الصيغة الرمزية الصحيحة للاستدلال السابق على النحو الآتي : —

$$(١ \text{ ب} = \text{صفر} . ١ \text{ ح} = \text{صفر} . ١ \neq \text{صفر}) \quad (\text{ب} \text{ ح} \neq \text{صفر})$$

الآن يمكن أن نطبق الطريقة المختصرة ، وذلك بتوسيع المقدمة الجزئية أى الدالة على وجود أفراد في فئة ما . وعلى ذلك علينا الآن توسيع المقدمة الثالثة الجديدة وهى : $(1 \neq \text{صفر})$.

ولكن كيف نقوم بتوسيعها ؟ إن الصعوبة التى نصادفها فى حالة توسيع $(1 \neq \text{صفر})$ هى كيف نقوم بإدخال الفئتين المحذوفتين $(ب ، >)$ عليها ؟ يمكننا أن نقوم بهذا التوسيع ، لو اتبعنا الخطوات التالية : —

$$١ - ١ \neq \text{صفر} \quad (\text{فرضا فى المقدمات})$$

$$٢ - ١ \times ١ \neq \text{صفر} \quad (\text{طالما أن } ١ \times ١ = ١)$$

$$٣ - ١(ب + \bar{ب}) \neq \text{صفر} \quad (\text{طالما أن } ١ = ب + \bar{ب})$$

$$٤ - ١ب + ١\bar{ب} \neq \text{صفر} \quad (\text{بتطبيق قانون الاستغراق})$$

$$٥ - (١ \times ١ب) + (١ \times ١\bar{ب}) \neq \text{صفر} .$$

ونلاحظ هنا أن كلا من حاصلى الضرب المنطقيين $١ب$ ، $١\bar{ب}$ ، يجب توسيعه حتى يشتمل على الفئة $>$ ولذا نحصل على :

$$٦ - [١ب(ب + >)] + [١\bar{ب}(\bar{ب} + >)] \neq \text{صفر} ،$$

$$(\text{لأن } ١ = \bar{ب} + ب)$$

$$٧ - ١ب + ١\bar{ب} + ١ب> + ١\bar{ب}> \neq \text{صفر}$$

(بتطبيق قانون الاستغراق)

هكذا أصبحنا الآن فى وضع نستطيع فيه معرفة صحة الاستدلال الأسمى ، بواسطة توسيع مقدمته الجزئية فقط ، ويصبح الاستدلال فى هذه الحالة ، على النحو الآتى : —

$$[\bar{a} = \text{صفر} \cdot a = \text{صفر} \cdot (a + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a})] \\ \neq \text{صفر} [a \neq \bar{a} = \text{صفر}]$$

نلاحظ في هذه الحالة أن المقدمتين السكيتين تحيلان ثلاث فئات من الأربع الواردة في المقدمة الجزئية الموسعة ، إلى فئات فارغة . ومن ثم فلا يمكن أن تكون هناك فئة ذات أعضاء في المقدمة الموسعة إلا الفئة $a \neq \bar{a}$. وبما أن الفئة \bar{a} الواردة في النتيجة أعم وأشمل من الفئة $a \neq \bar{a}$ ذات الأعضاء ، فمن الأولى أن تكون للفئة الأشمل ، وهي $(a \neq \bar{a})$ ، هي بدورها فئة ذات أعضاء . وطى ذلك فإن $a \neq \bar{a}$ ليست فئة فارغة ، أو هي لا تساوى صفرا ، وهو المطلوب إثباته في النتيجة . إذن فالنتيجة تلزم عن المقدمات ، إذن فالاستدلال صحيح .

ويمكن توضيح هذه الخطوات السابقة في البرهنة على النحو الآتي : -

- ١ - إذا كانت $a = \text{صفر}$ (في المقدمة الثانية) $\therefore a = \text{صفر} \cdot \text{صفر} = \text{صفر} \cdot$
- ٢ - وإذا كانت $\bar{a} = \text{صفر}$ (في المقدمة الأولى) $\therefore \bar{a} = \text{صفر} \cdot \text{صفر} = \text{صفر} \cdot$
- ٣ - وإذا كانت $\bar{a} = \text{صفر}$ » $\therefore a \neq \bar{a} = \text{صفر} \cdot$
- ٤ - وبما أن : $a + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} = a \neq \bar{a}$ (في المقدمة الثالثة)
- ٥ - إذن : $\text{صفر} + \text{صفر} + \text{صفر} + \bar{a} \neq \text{صفر} \cdot$
- ٦ - $\therefore a \neq \bar{a} = \text{صفر} \cdot$
- $\therefore a \neq \bar{a}$ فئة ذات أعضاء .
- ٧ - وبما أن $a \neq \bar{a}$ (الواردة في النتيجة) أعم وأشمل من الفئة $a \neq \bar{a}$ ،
- ٨ - إذن فمن الضروري أن تكون الفئة $a \neq \bar{a}$ هي بدورها فئة ذات أعضاء .
- $\therefore a \neq \bar{a} = \text{صفر} \cdot$
- \therefore فالاستدلال صحيح . وهو المطلوب .

هذا ويمكننا الآن أن نلخص أهم القوانين التي اتبعناها في استدلال قضايا الفئات ، بالإضافة إلى عدد من القوانين الأخرى الخاصة بالفئتين الشاملة والفارغة ، التي وردت في هذا الجزء الخاص بالاستدلال .

وعلى ذلك فالقوانين التالية ، تكون مكملة لقائمة القوانين الخاصة بالحساب التحليلي للفئات التي أوردناها من قبل ، بحيث يمكننا القول بأن القائمتين معاً تحتويان على أهم القوانين الخاصة بالحساب التحليلي لفئات والاستدلال للتعليق به .

(أ) قوانين الفئة الشاملة والفئة الفارغة :

$$١ - ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$= ١ \times ١ - ٢$$

$$٣ - ١ = \overline{\text{صفر}} ، \text{أو} : \text{صفر} = \overline{١}$$

$$٤ - ١ + \text{صفر} = ١$$

$$٥ - ١ + ١ = ١$$

$$٦ - (١ = ١) \equiv (١ = \text{صفر})$$

$$٧ - (١ \neq ١) \equiv (١ \neq \overline{\text{صفر}})$$

(ب) قوانين التناقض :

$$١ - (١ = \text{صفر}) \equiv ١ \neq \text{صفر} .$$

$$٢ - (١ \neq \text{صفر}) \equiv ١ = \text{صفر} .$$

$$٣ - (١ \equiv \text{صفر}) \equiv (١ \equiv \overline{\text{صفر}}) .$$

(ح) قوانين التضاد :

- ١- $[(١ = \text{صفر} \cdot ١ \neq \text{صفر})] \supset (١ = \text{صفر})$.
- ٢- $[(١ = \text{صفر} \cdot ١ \neq \text{صفر})] \supset (١ = \text{صفر})$.
- ٣- $١ = \text{صفر} \supset (١ \equiv \text{صفر})$.
- ٤- $\text{صفر} \equiv ١ \supset (١ = \text{صفر})$.

(د) قانونا الدخول تحت التضاد :

- ١- $[(١ \neq \text{صفر}) \cdot (١ \neq \text{صفر})] \supset ١ \neq \text{صفر}$.
- ٢- $[(١ \neq \text{صفر}) \cdot (١ \neq \text{صفر})] \supset ١ \neq \text{صفر}$.

(هـ) قانونا التداخل :

- ١- $(١ = \text{صفر} \cdot ١ \neq \text{صفر}) \supset ١ \neq \text{صفر}$.
- ٢- $(١ = \text{صفر} \cdot ١ \neq \text{صفر}) \supset ١ \neq \text{صفر}$.

(و) قوانين خاصة بالاختبار الرمزي الموسع :

- ١- $(١ + ١ + ١ + ١) = (١ + ١) = ١$.
- ٢- $١ = \text{صفر} \supset ١ = \text{صفر}$.
- ٣- $١ \neq \text{صفر} \supset ١ \neq \text{صفر}$. (وكذا : $١ \neq \text{صفر}$) .
- ٤- $\text{صفر} \equiv ١ \supset \text{صفر} \equiv ١$. (وكذا : $\text{صفر} \equiv ١$) .

الفصل الثالث

الحساب التحليلي للقضايا

Propositional Calculus

يعتبر الحساب التحليلي للقضايا أكثر أجزاء المنطق للعاصر أهمية ، وأكثرها أولية . والأولية هنا لا تعني الأسبقية الزمنية ، بقدر ما تعني الأولية للمنطقية . وهذا هو السبب في أن كثيرا من الكتب المنطقية تبدأ بالحساب التحليلي للقضايا ، قبل حساب الفئات . وقد أشرنا من قبل إلى أننا نقضل — من الناحية المنهجية — ذكر مكونات القضية (أى الفئات والحدود) قبل ذكر القضايا نفسها ، في دراسة تمهيدية مبسطة للمنطق الحديث ، كهذه التي بين أيدينا .

وهكذا فنحن في الحساب التحليلي للقضايا لا ندخل في اعتبارنا البنية المنطقية الداخلية للقضايا — كما تتضح مثلا من العلاقة بين الموضوع والمحمول في القضية التقليدية ، بقدر إهتمامنا بالقضايا ككل من حيث ترابطها المنطقي وعلاقتها بغيرها أو بذاتها ، حين نتخذ حياها بعض الاجراءات المنطقية ، الأمر الذي يترتب عليه التوصل إلى قضايا مركبة هي أقرب إلى الدالات منها إلى القضايا^(١) . وبعبارة أخرى فستكون وحدتنا الأساسية في حساب القضايا ، هي القضية لا الفئة . وباتخاذ بعض الاجراءات إزاء القضايا ، والعلاقات التي تنشأ بينها ، فإننا نستطيع إقامة الحساب التحليلي للقضايا^(٢) .

(١) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 3.

Mourant, J. A. : Formal Logic, P, 217

ومادام حديثنا سينصرف إلى القضية ككل ، لا إلى مكوناتها ، فسوف نستخدم من الرموز ما يشير إلى القضايا ، كما فعلنا من قبل بالنسبة للفئات . وسوف نستخدم : u, l, m, \dots (p.q.r.) للدلالة على القضايا ، كما كنا نستخدم من قبل الرموز : a, b, c, \dots (a.b.c.) للدلالة على الفئات ، والرموز : s, v, \dots (x.y.) للدلالة على الأعضاء المفردة أو للاصدقات الجزئية . وكما أن الرمز (١) مثلا يدل على فئة ما ، ولا يدل على فئة بعينها ، من حيث هو متغير ، فكذلك الرمز (u) مثلا يدل على قضية ما ، من حيث هو متغير ، ولا يدل على قضية معينة بالذات . ومن ثم فالرموز : u, l, m, \dots متغيرات ترمز لأي قضايا لا إلى قضايا بعينها . ولتوضيح ذلك نقول أن المتغير Variable هو ما لا يكون له معنى محدد ، بل يكون أشبه بالمجهول الذي تظل قيمته غير معلومة إلى أن نضع بدلا منه رمزا محدد القيمة . أما الثابت Constant فهو ما لا يتغير معناه رغم اختلاف مواضعه ، بل يأخذ معنى محددًا ثابتًا أينما ورد . ولذا يعرفه رسل بأنه (ما يجب أن يكون شيئًا محددًا تحديدًا مطلقًا ، شيئًا لا إبهام فيه ألبته)^(١) ، أو هو (ما يلعب في التعبير اللغوي ، أو الرمزي ، للقضايا المنطقية دورًا ثابتًا)^(٢) بحيث يكون له نفس الاسهام في دلالة القضية حينما يرد . وكأمثلة على المتغيرات نذكر : a, b للفئات ، u, l للقضايا ، s, v للجزئيات المفردة . وكأمثلة على الثوابت ، وخاصة الثوابت للمنطقية ، نذكر : « أو » ، « و » ، « لا » ، « إذا ... إذن » ، وغير ذلك^(٣) وهي التي سوف نرمز لها بالرموز التالية :

« ٧ » ، « ٠ » ، « - » ، « + » على الترتيب ، في الحساب التحليلي للقضايا .

-
- (١) برتراند رسل : أصول الرياضيات . (ترجمة الدكتورين أحمد فؤاد الأهواني ، محمد مرسى أحمد) ، الجزء الأول (صفحة ٣٥) .
 (٢) للرجع السابق ، صفحة ١١ .
 (٣) للرجع السابق ، للوضع نفسه .

وبما أن الرموز التي ذكرناها كمتغيرات للقضايا مثل : u ، v .. إنما تدل على قضايا بسيطة ، فإنها لو ترابطت بعضها مع بعض باستخدام الثوابت المنطقية ، أو لو أدخلنا عليها بعض الثوابت المنطقية لحصلنا من ذلك على ما يسمى باسم دالات الصدق . وعادة ما يسمى استخدامنا للثوابت المنطقية بالنسبة للمتغيرات في المنطق الحديث ، بالاجراءات التي تتبع إزاء متغيرات القضايا . وسنذكر فيما يلي بعض هذه الاجراءات : -

أهم الاجراءات التي تتبع إزاء القضايا :

ويمكن أن نقسمها إلى قسمين : إجراءات بسيطة ، أو واحدة (١) ، وإجراءات مركبة تتكون من أكثر من إجراء ، وفيما يلي تفصيل ما أوجزناه :

أولا : الاجراءات البسيطة :

وتمثل أهمها في : -

١ - النفي Negation ويرمز له بالعلامة « - » (٢) التي توضع قبل القضية المراد نفيها مثل : (u -) التي تكون نفيًا للقضية (u) .

هذا ويلاحظ أننا لو كررنا إجراء النفي مرة أخرى لحصلنا على القضية للأشبهة الأصلية بمعنى أن : $u \equiv u - -$ (٣)

وذلك لأن نفي النفي إثبات . ولذا فإننا عادة ما نضع بدلا من ($u - -$) الرمز

(١) monadic

(٢) وتسمى العلاقة الخاصة بالاجراء عادة ، مثل « - » وغيرها باسم علامة الاجراء أو عامل الاجراء Operator .

(٣) كما كنا نقول في حساب الفئات أن : $1 = 1$.

(١) « ٧ » . ولتذكر دائماً أن نقي « ٧ » هو « ٧ » ، كما أن نقي « ٧ » هو « ٧ » .

وتسمى القضيتان اللتان تكون إحداها نقياً للآخرى بالقضيتين المتناقضتين (٢) Contradictory sentences ، وذلك لأن صدق إحداها تستلزم دائماً كذب الأخرى فهما لا تصدقان معاً ولا تكذبان معاً . بمعنى أنه لو كانت القضية « ٧ » صادقة ، كانت « ٧ » كاذبة ، وبالعكس فلو كانت « ٧ » صادقة ، كانت « ٧ » كاذبة . وأيضاً لو كانت « ٧ » كاذبة ، كانت « ٧ » صادقة ، وبالعكس ، فلو كانت « ٧ » كاذبة ، كانت « ٧ » صادقة .

٢ — الضرب المنطقي :

أو كما يسمى أحياناً بالعطف Conjunction المنطقي . ويمكن تمثيل صورته العامة بالصيغة التالية :

٧ . ل

التي تعني : أن القضيتين ٧ ، ل صادقتان معاً . ويلاحظ هنا أن النقطة التي ترد بين القضيتين فتربط بينهما في التعبير السابق ، تعني ما تعنيه الأداة « و » . وعادة ما تسمى القضايا التي يتم ربطها على هذا النحو (مثل ٧ ، ل) بعناصر العطف members of conjunction أو عوامل حاصل الضرب المنطقي Factors of logical product ، أو القضايا للعطف أو للضروبة . كما يسمى التعبير للتركيب الذي ينتج عن ضرب قضيتين أو أكثر ، أو عطفهما ، بالقضية العطفية Conjunctive proposition

(١) كما أننا نضع بدلاً من أ ، الرمز ١ في حساب الفئات .

(٢) Tarski, A. : Introduction to Logic P,20

ولهذا الكتاب ترجمة عربية قام بها المؤلف ولا تزال تحت الطبع .

أو بحاصل الضرب المنطقي Logical product . ويمكن توضيح معنى الضرب المنطقي للقضايا على النحو الآتي : -

لو كانت القضية « و » تدل على أن (٢ عدد صحيح موجب) ، وكانت « ل » تدل على أن (٢ أصغر من ٣) ، وربطنا بينهما بأداة العطف « و » . لحصلنا على القضية المعطية التالية : -

٢ عدد صحيح موجب ، و ٢ أصغر من ٣ ، اللق نعبر عنها رمزيا بالصيغة :

$$(و . ل)$$

ونلاحظ في هذه الحالة أن صدق القضية المعطية يكون مساويا لصدق القضيتين المعطوفتين . فإذا كانت القضية المعطية (و . ل) صادقة ، كانت مكوناتها (و) ، (ل) صادقة أيضا ، وبالعكس فإذا كانت القضيتان المعطوفتان (و) ، (ل) صادقتين كانت كذلك القضية المعطية . أما إذا كان أحد عناصر القضية المعطية على الأقل كاذبا ، كانت القضية المعطية كلها كاذبة (١) . وأيضا إذا كانت القضية المعطية كاذبة ، كانت كذلك إحدى القضايا المعطوفة ، أو كلها كاذبة . وسنعود إلى تفصيل ذلك حين نعبّر عن دالات الصدق بقوائم الصدق فيما بعد .

بعض نتائج الضرب المنطقي للقضايا :

$$(١) و . ل \equiv ل . و$$

وتقرأ : إن القول بصدق القضيتين و . ل معاً ، يكافئ القول بصدق القضيتين ل ، و معاً . وهذا يعني أن ترتيب القضايا في حالة العطف لا يغير من صدقها .

(١) للرجع السابق للوضع نفسه .

فسواء بدأت بمطف القضية \vee إلى القضية \vee ، أو بمطف القضية \vee إلى القضية \vee ، فالصدق الناتج يكون هو هو في كلتا الحالتين .

(ب) $\vee . \vee \equiv \vee$

وتقرأ : إن القول بالقضية \vee ، والقضية \vee في الوقت نفسه مرة أخرى ، مكافئ للقول بالقضية \vee مرة واحدة فقط . وبعبارة أخرى ، فإن تكرار القول بأن القضية \vee صادقة مرتين أو أكثر ، مكافئ لقولنا مرة واحدة بصدق هذه القضية .

وهكذا يمكننا أن نكتب التعبير الصحيح التالي : -

$\vee . \vee . \vee . \vee . \vee . \vee \equiv \vee$

٣ - الجمع المنطقي :

ونسماه كذلك بالفصل Disjunction المنطقي . وتتمثل صورته العامة في الصيغة التالية : -

$\vee \vee \vee \vee$

التي تعني بصفة عامة القول بصدق واحدة من القضيتين \vee أول ، أو صدقهما معاً . ويلاحظ أن العلامة « \vee » التي ترد بين القضيتين فتربط بينهما في التعبير السابق ، تعني ما تعنيه الأداة « أو » التي تفيد الجمع addition أو الفصل في المنطق ، وهو نفس المعنى الذي تفيد به العلامة « $+$ » السابق إستخدامها في منطق الفئات .

ولكن الفصل في المنطق إما فصل ضعيف أو فصل قوى ، وقد أوضحنا ذلك من قبل بالنسبة لجمع الفئات (١) ، وهو ما ينطبق كذلك بالنسبة لحساب القضايا ،

(١) وقد إستخدمنا العلامة « $+$ » للفصل الضعيف ، وإستخدمنا العلامة « $(+)$ » للتعبير عن الفصل القوى في حساب الفئات .

فنعن نستخدم العلامة « ٧ » للتعبير عن الفصل الضعيف بين القضايا ، كما نستخدم العلامة « (٧) » للتعبير عن الفصل القوي أو الاستبعادي بين القضايا . ولكي نفرق بين علامتين ، سنكتب الأولى بمعنى « أو » وسنكتب الثانية بمعنى « إما أو » . ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي :-

(١) إذا كان لدينا التعبير التالي :-

٧ ل

قرأناه : أن إحدى القضيتين ل أو صادقة ، مع إمكان صدقهما معاً . فإذا كانت « ل » ترمز للقضية : (الطالب مجتهد) ، وكانت « ل » ترمز للقضية « الطالب ذكي » ، أمكننا أن نكتب التعبير (٧ ل) على النحو الآتي :-

(الطالب مجتهد أو ذكي)

وهذا يعني صدق إحدى الحالات التالية :-

- ١ — أن تكون القضية (الطالب مجتهد) ، أي « ل » صادقة .
- ٢ — أو أن تكون القضية (الطالب ذكي) ، أي « ل » صادقة .
- ٣ — أو أن تكون كل من القضيتين « ل » ، « ل » صادقة فيكون الطالب مجتهدا وذكيا في الوقت نفسه .

وسنسمى القضية الناتجة من جمع القضيتين أو أكثر باسم القضية الفصلية disjunctive أو بمجمل الجمع المنطقي Logical Sum . كما نسمى القضايا المجموعة باسم عناصر الفصل المنطقي ، أو عناصر القضية الفصلية ، أو العناصر المفصلة في مجمل الجمع المنطقي . هذا ويلاحظ في المثال السابق أن القضية الفصلية تكون صادقة إذا كانت إحدى القضيتين المنفصلتين أو المجموعتين صادقة ، أو كانتا صادقتين معاً ،

(م ١٠ — أسس المنطق الرمزي)

ولا تكون صادقة في حالة كذبهما معاً . وبالعكس فإذا كانت القضية الفصلية صادقة ، كانت إحدى القضيتين للفصولتين — على الأقل — صادقة ، مع إمكان أن تكونا صادقتين معاً ، ومع إمكانية كذبهما معاً .

(ب) أما إذا كان لدينا التعبير التالي :

و (٧) ل

فيقرأ : إن إحدى القضيتين « و » أو « ل » صادقة ، مع إمكانية صدقهما معاً . فإما أن تكون « و » صادقة أو « ل » صادقة لكنهما لا تكونا كذلك معاً في الوقت نفسه . فإذا صدقت القضية « و » ، كذبت القضية « ل » ، وإذا كذبت القضية « و » ، صدقت القضية « ل » . وبالعكس فإذا صدقت « ل » ، كذبت « و » ، وإذا كذبت ل ، صدقت و (١) .

وتسمى القضية المعبرة عن الفصل القوي أحياناً باسم قضية البدائل ، لأننا نتكلم عن صدق واحدة من القضيتين البديلتين فقط . وهكذا تكون القضية المعبرة عن الفصل القوي ، أو قضية البدائل ، صادقة إذا كانت إحدى القضيتين البديلتين أو للفصولتين صادقة ، وتكون كاذبة في حالة صدق القضيتين للفصولتين معاً أو كذبهما معاً . وبالعكس فلو كانت القضية المعبرة عن الفصل القوي صادقة ، دل هذا على صدق أحد البديلين . أما لو كانت كاذبة ، فإن هذا يدل إما على صدق البديلين معاً أو كذبهما معاً . وسيزداد وضوح هذا الفارق بين الفصلين القوي والضعيف حيناً نمر عن صدقهما بقوائم الصدق فيما بعد .

(١) وهي نفس العلاقة التي نجدها بين القضيتين المتقابلتين بالتناقض .

بعض نتائج الجمع للنطق للقضايا :

١ — أولا : $\text{و} \vee \text{ل} \equiv \text{ل} \vee \text{و}$.

ثانيا : $\text{و} (\overline{\text{و}}) \equiv (\overline{\text{و}}) \text{ل}$.

وهذا يعنى (أولا) : إن القول بأن « و » صادقة أو « ل » صادقة ، يكافئ القول بأن « ل » صادقة أو « و » صادقة .

ويعنى (ثانيا) : أن القول « بإما أن تكون و صادقة أو ل صادقة » ، يكافئ القول « بإما أن تكون ل صادقة أو و صادقة » .

وهكذا فترتيب القضايا في حالة الجمع لا يغير من كمية الصدق ، فسواء بدأت الجمع بالقضية و إلى القضية ل أو بالعكس ، بالقضية ل إلى القضية و ، فالصدق هو هو في كلتا الحالتين .

٢ — أولا : $\text{و} \vee \text{و} \equiv \text{و}$.

ثانيا : $\text{و} (\overline{\text{و}}) \equiv \text{و}$.

وتعنى هذه النتيجة أن حاصل جمع أية قضية إلى نفسها يكافئ القول بالقضية ذاتها قبل الجمع . أو بعبارة أخرى تكون القضية الفصلية مكافئة لأية واحدة من القضيتين للفصولتين (سواء كان هذا الفصل فصلا ضعيفا أو قويا) .

ويلزم عن هذا أننا لو كررنا عملية جمع القضية إلى نفسها أكثر من مرة لحصلنا على القضية الأصلية ذاتها . ولنوضح ذلك بالمثال التالى : —

$\text{و} \vee \text{و} \equiv \text{و}$ (ولنرمز للشرط الأيسر من التكافؤ بالرمز و)

∴ $\text{و} \vee \text{و} \vee \text{و} \equiv \text{و}$

(وانظر للشطر الأيسر من التكافؤ بالرمز ٢٧) $١٧ \equiv ١٧ \vee ١٧$

$$٢٧ \equiv ١٧ \vee ١٧ \therefore$$

$$١٧ \equiv ٢٧ \therefore$$

$$٧ \equiv ١٧ \therefore ،$$

$$\therefore ٧ \vee ٧ \vee ٧ \vee ٧ \vee ٧ \vee ٧ \equiv ٧ \therefore$$

ثانياً : الاجراءات المركبة Compound Operations

وهي التي تتكون من إجراءات أو أكثر ، وسنذكر فيما يلي بعض هذه
الاجراءات على سبيل المثال لا الحصر : —

١ — الاجراء للركب من النفي والضرب

مثل : —

$$١ — ٧ \cdot ٧ \equiv ٧ \cdot ٧$$

وتقرأ : إن القول بصدق القضية ٧ ، وكذب القضية ٧ معاً ، مكافئ للقول
بكذب القضية ٧ وصدق القضية ٧ معاً .

وللبرهنة على صحة ذلك نضع المتغير (م) بدلا من (٧) ، فنحصل على :

$$٧ \cdot م \equiv م \cdot ٧$$

ومثل : —

$$٢ — ٧ \cdot ٧ \equiv ٧ \cdot ٧$$

وتقرأ : إن القول بكذب القضيتين ٧ ، ٧ معاً يكافئ القول بكذب القضيتين
٧ ، ٧ معاً .

ۛۛۛۛۛ = ۛۛۛۛۛ - ۛ

والبرهنة على صحة ذلك نضع المتغير (م) بدلا من (ل) فنحصل على :

$$\psi \gamma \mu \equiv \mu \gamma \psi$$

۲- و مثل $\overline{u} \cdot J = J \cdot \overline{v}$ $\overline{v} \cdot J = J \cdot \overline{u}$

وتقرأ : إن القول إما أن تكون القضية \vee كاذبة أو أن تكون القضية \wedge كاذبة ، مكافئ للقول بأنه إما أن تكون \wedge كاذبة أو أن تكون \vee كاذبة .

٣ - الاجراء المركب من النفي والجمع والضرب

$$J - \gamma v_- \equiv (J \cdot v)_- \quad - 1$$

وتقرأ : إن كذب القول بأن هـ ، ل صادقاً معاً ، يكفى القول بكذب القضية
هـ ، أو كذب القضية ل .

٢- ومثل : $(J \vee v) \vdash J \vee v$

وتقرأ : إن كذب القول يصدق القضية \vee أو يصدق القضية \wedge ، مكافئاً للقول -
يكذب القضية \vee ، \wedge معاً .

أهم العلاقات بين القضايا :

١ — علاقة الهوية Identity : وتنشأ بين القضية ونفسها كأن نقول :

$$v \equiv v .$$

ونعني بهذه الصيغة أن أية قضية تكون هي هي نفسها وتكون مكافئة لنفسها .

ويلاحظ هنا أننا قد عبرنا عن علاقة الهوية بين القضايا باستخدام علامة التكافؤ (١) وإن كنا نستطيع التعبير عنها بعلامات أخرى ، كما سيتضح فيما بعد .

٢ — علاقة التكافؤ Equivalence :

والتكافؤ قد يكون بين القضية الواحدة ونفسها — كما في المثال السابق —
فيكون معبراً عن الهوية ، كما قد يكون بين قضيتين أو أكثر مثل : —

$$v \equiv l$$

$$أو : v \equiv l \equiv m .$$

فيعبر في هذه الحالة عن تساوى كمية الصدق في القضايا المتكافئة . كما يعبر في الوقت نفسه عن اللازم للتبادل بين القضيتين المتكافئتين . فلو كانت لدينا الصيغة التالية :

$$v \equiv l$$

لسكان معنى ذلك أن كلا من القضيتين v ، l تلزم عن الأخرى وتستلزمها
كذلك ، أى أن تكون ($v \supset l$) ، كما تكون ($l \supset v$) .

(١) كما عبرنا من قبل عن علاقة الهوية بين الثنائيات بعلامة التساوى « = » .

والواقع أن التكافؤ لا يقوم فقط بين قضايا مفردة بسيطة مثل $و$ أو $ل$ ، بل من الممكن أن يقوم كذلك بين قضايا مركبة مثل : —

$$و \vee ل \equiv ل \vee و$$

٣ — علاقة اللزوم :

ويمكن أن نعبر عنها بالصيغة العامة التالية : —

$$و \supset ل$$

ويلاحظ هنا أننا قد استخدمنا العلامة « \supset » للتعبير عن اللزوم بين القضايا ، وهي نفس العلامة التي استخدمناها من قبل للدلالة على التضمن بين الفئات . وما يميز العلامة في هذه الحالة ، عنها في حالة الفئات ، هي الرموز التي ترد معها في كلتا الحالتين . فإذا إرتبطت برموز مثل : $ل$ ، $و$ ، $ح$... كانت دالة على التضمن بين الفئات ، أما إذا إرتبطت برموز مثل : $و$ ، $ل$ ، $م$... كانت دالة على اللزوم بين القضايا . وهكذا فإننا نقرأ الصيغة السابقة ($و \supset ل$) ، على النحو الآتي :

إن صدق القضية $و$ ، يلزم عنه صدق القضية $ل$. أو نقرأ : إن صدق القضية $و$ يستلزم صدق القضية $ل$. أو نقرأ (باعتبارها قضية شرطية متصلة) : إذا كانت القضية $و$ صادقة ، كانت إذن القضية $ل$ صادقة .

بـ — إذا المعنى الأخير ، تصبح العلامة « \supset » من حيث هي سوء لقضية شرطية مرادفة لقولنا « إذا ... إذن ... » (if ... then ...) . كما تصبح القضية « $و$ » هي للقدم أو السابق antecedant ، وتصبح القضية « $ل$ » هي التالي Consequent أو اللاحق في القضية الشرطية ($و \supset ل$) .

وما دما قد أحيينا العلاقة بين $و$ ، $ل$ بعلاقة اللزوم في المنطق الرمزي ، فسوف

(ب) كما أن كذب لل لازم (ل) يستلزم كذب للزوم (و) ، لكن كذب و لا يستلزم كذب ل . ويمكننا أن نعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :-

$$\text{أولاً : } \quad \text{و} \supset \text{ل} \equiv \text{ل} \supset \text{و} \quad \text{و} \supset \text{و}$$

وتقرأ : إن القول بأن و تستلزم ل ، يكافئ القول بأن كذب ل يستلزم كذب و . ويسمى اللزوم في هذه الحالة (أى الذى يعبر عن أن كذب اللزم يستلزم كذب للزوم) بإسم اللزوم العكس Counter - implication ، كما تسمى الصيغة السابقة أحياناً بإسم مبدأ عكس النقيض .

$$\text{ثانياً : } \quad \text{و} \supset \text{ل} \leftrightarrow \text{و} \leftarrow \text{ل} \supset \text{و}$$

وتقرأ : إن القول بأن و تستلزم ل ، لا يكافئ القول بأن كذب و يستلزم كذب ل .

٢ - إن اللزوم بين القضايا يكون متبادلاً في حالة واحدة فقط ، هى حين يكون هناك تكافؤ بين اللزوم وللزوم . فلو كانت القضية و تستلزم القضية ل ، وكانت القضية ل تستلزم القضية و في الوقت نفسه ، كانت القضية و مكافئة للقضية ل . ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً على النحو الآتى :-

$$\text{و} \supset \text{ل} \cdot \text{ل} \supset \text{و} \equiv (\text{و} \equiv \text{ل})$$

وتقرأ : إن القول بأن و تستلزم ل ، وأن ل تستلزم و في الوقت نفسه ، مكافئ للقول بأن القضية و تكافئ القضية ل (١) .

(١) وقد عبرنا من قبل عن مبدأ شبيه بهذا في حساب القئات وهو :

$$(ا \supset ب) \cdot (ب \supset ا) \equiv (ا = ب)$$

وبالعكس ، فلو كانت القضية v تكافئ القضية l ، لكان معنى ذلك أن تكون كل من القضيتين مستلزمتة للآخرى . ونعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :-

$$(l \equiv v) \equiv (l \supset v) \cdot (v \supset l)$$

٤ — علاقة التنافر Incompatibility :

ويمكن تعريف التنافر على أنه عناد ضرورى بين قضيتين (أو أكثر) ، كل قضية منهما يمكن إفتراض صدقها على حدة ، لكن من المستحيل صدقهما معاً (١) .
مثل :-

أولاً : — ($v \cdot v$)

وتقرأ : إنه من الكذب أن تكون كل من القضية v وقيها أو نقيضها ، صادقة في وقت واحد ، لأن هذا معناه أن تكون القضية الواحدة «ق» صادقة وكاذبة في آن واحد .

ثانياً : ومثل — ($l \cdot v$)

وتقرأ : إنه من الكذب أن نقول بصدق القضيتين v ، l معاً (وذلك في حالة وجود تناقض أو تضاد بين القضيتين v ، l . لأن الحكم في كلتا الحالتين ينفي صدق القضيتين في وقت واحد) .

بعض القوانين الابتدائية الخاصة بحساب القضايا :

سنقتصر فيما يلي على أهم القوانين التي تعبر عن الإجراءات والعلاقات السابق ذكرها بالنسبة لحساب القضايا ، وسنكمل هذه القائمة بقائمة أخرى تعبر عن أهم القوانين

(٢) د . زكي نجيب محمود : للنطق الوضعي ، الجزء الأول ، صفحة ٣١٢

الخاصة بالقضايا واستدلالاتها ، بعد أن نعرض لأهم الاستدلالات الخاصة بحساب القضايا .

١ — قانون الهوية Law of Identity :

ويمكن التعبير عنه رمزياً على أكثر من نحو مثل (١) :

$$١ - \quad \text{v} \equiv \text{v}$$

وتقرأ : v تكافئ v (أو أن أية قضية تكافئ نفسها) .

$$٢ - \quad \text{v} \leftrightarrow \text{v}$$

وتقرأ : إن صدق القضية لا يسكف كذبها .

$$٣ - \quad \text{v} \supset \text{v}$$

وتقرأ : إذا كانت v صادقة ، كانت v إذن صادقة .

٢ — قانون التناقض Law of Contradiction :

$$\text{أولاً : } - (\text{v} \cdot \neg \text{v}) \quad (٢)$$

(١) وإن كان هانز رايشباخ يعبر عن هذا القانون بالصيغة الأولى بالإضافة إلى الصيغتين التاليتين : $(\text{v} \vee \neg \text{v})$ ، $(\text{v} \equiv \neg \neg \text{v})$ وذلك في كتابه :-

Reichenbach, H : Elements of Symbolic Logic , P, 38

(٢) وهو يعبر عن معنى التناقض ، كما أشرنا من قبل ، وينظر قانون التناقض الذي أوردناه في حساب الفئات وعبرنا عنه بالصيغة $\neg \text{v} = \text{v}$ صفر .

ويقراً : إن القول بأن القضية \vee صادقة ، وبأنها كاذبة في الوقت نفسه قول كاذب (١) .

ثانياً : كما يمكن التعبير عن المعنى السابق أيضاً كما يلي : —

$$\vee \cdot \vee = \text{صفر}$$

وتقرأ هذه الصيغة : إن القول بأن القضية \vee صادقة ، وبأنها كاذبة في الوقت نفسه ، هو قول كاذب دائماً . ويلاحظ هنا أننا إستخدمنا تعبيراً جديداً ، وهو $(\vee = \text{صفر})$ ويعنى أن القضية \vee كاذبة دائماً .

٣ — قانون الوسط المرفوع Law of Excluded Middle

ويمكن التعبير عنه رمزياً كما يلي :

$$\vee - \vee^{(2)}$$

ويتلخص في القول بأنه إما أن تكون القضية \vee صادقة أو أن تكون القضية $(\vee - \vee)$ صادقة (أو أن القضية \vee كاذبة) ولا وسط بين الحالتين البديلتين .

(١) يلاحظ في هذه الصيغة أننا وضعنا علامة النفي « - » خارج القوس تعبيراً عن نفي القول كله لا إحدى مكوناته . وإن كان هناك من يفضل طريقة أخرى للتعبير عن نفي القضية العطفية كلها ، وذلك بوضع خط أفقي فوق متغيرات القضية العطفية كلها مثل :

$\vee - \vee$. وهو التعبير الذي أورده هانز رايشنباخ في كتابه صالف الذكر ،
صفحة ٣٨ .

(٢) وينظر القانون : $1 + 1 = 1$ في حساب الفئات .

نلاحظ في هذه الحالة أن قانون الوسط المرفوع شبيه بحالة الجمع أو الفصل القوي مثل :

$$v \equiv \overline{(v)} \quad \text{ل}$$

الذي يفيد صدق إحدى القضيتين v أو \overline{v} مع استحالة صدقهما معاً . ولانميز بين قانون الوسط المرفوع وبين صيغة الجمع القوي للقضايا يمكن القول : بأن قانون الوسط المرفوع نوع من الجمع القوي ، في حين أن الجمع القوي ليس متصوراً على قانون الوسط المرفوع . طالما أن قانون الوسط المرفوع قائم على جمع قضيتين هما v ، \overline{v} في حين أن الجمع القوي يمكن أن يكون جمعاً لقضيتين متناقضتين أو متضادتين . ومن ثم يمكن الانتهاء إلى القول بأن الجمع القوي أعم وأشمل من قانون الوسط المرفوع .

٤ — قانون تحصيل الحاصل Law of Tautology :

ويمكن التعبير عنه بأكثر من صيغة مثل :

$$\text{أولاً : } v \equiv v \quad (\text{في حالة الضرب المنطقي})^{(1)}$$

$$\text{ثانياً : } v \vee \overline{v} \equiv v \quad (\text{في حالة الجمع المنطقي})^{(2)}$$

وللتقارب الكبير بين هذه الصيغ المعبرة عن تحصيل الحاصل ، وبين الصيغ المعبرة عن الهوية فقد ذهب بعض اللغاة إلى جمعها تحت قانون واحد هو قانون الهوية، مثل هانز رايشنباخ^(٣) الذي أورد هاتين الصيغتين الخاصتين بتحصيل الحاصل ، مع الصيغة المعبرة عن الهوية .

(١) وينظر الصيغة : $1 = 1 \times 1$ في حساب الفئات .

(٢) وينظر الصيغة : $1 = 1 + 1$ في حساب الفئات .

(٣) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, p. 38

٥ — قانون التبسيط Law of Simplification

أولاً : $W \supset (L \vee V)$ (الخاص بالجمع)

وتقرأ : إذا كانت W كانت إذن W أو L . كما تقرأ أيضاً : أن صدق القضية W يستلزم القول بصدق واحدة من القضيتين : W أو L (أو صدقهما معاً) .

وبعبارة أخرى فإن صدق أية قضية مثل W يترتب عليه إمكان جمع هذه القضية إلى أية قضية أخرى مثل L .

ثانياً : $(L \cdot V) \supset W$ (الخاص بالضرب)

وتقرأ : إذا كانت W ، وكانت L ، كانت إذن W .

وبعبارة أخرى : إذا كانت القضية المعطية $(L \cdot V)$ صادقة ، لزم عن هذا أن تكون القضايا المعطوفة نفسها صادقة ، وبالتالي تكون W صادقة ، كما تكون L صادقة أيضاً . ومن ثم يمكننا أن نكتب كذلك :

$$(L \cdot V) \supset L$$

وتقرأ : إذا كانت W ، وكانت L ، كانت إذن L . أو تقرأ : إن القول بصدق W ، L معاً يستلزم صدق L على حدة .

٦ — قانون التبادل Laws of Commutation

أولاً : $L \cdot V \equiv V \cdot L$ (في حالة الضرب للنطق) (١)

ثانياً : $L \vee V \equiv V \vee L$ (في حالة الجمع للنطق) (٢)

(١) وتناظر هذه الصيغة ، الصيغة $a \times b = b \times a$ في حساب الفئات .

(٢) وتناظر هذه الصيغة ، الصيغة $a + b = b + a$ في حساب الفئات .

وقد سبق توضيح معنى التبادل بين القضايا من قبل بالتفصيل .

٧ — قانونا الترابط Laws of association

أو قانونا ترتيب الحدود : —

أولاً : $ص (ل . م) \equiv م (ل . ص) \equiv م (ل . م) \equiv ل (م . ص)$

أو : $ص (ل . م) \equiv م (ل . ص) \equiv م (ل . م) \equiv ل (م . ص) . (١)$

ونقرأ : إن القول بصدق القضية $ص$ ، والقضية العطفية $(ل . م)$ معاً ، يكافئ القول بصدق القضية $م$ والقضية العطفية $(ل . ص)$ معاً ، ويكافئ القول بصدق القضية $ل$ ، والقضية العطفية $(م . ص)$ معاً .

ثانياً : $ص (ل م) \equiv م (ل ص) \equiv ل (م ص) \equiv م (ل م) \equiv ل (م ص) . (٢)$

ونقرأ : إن القول بصدق القضية $ص$ أو صدق القضية الفصلية $(ل م)$ ، يكافئ القول بصدق القضية $م$ أو القضية الفصلية $(ل ص)$ ، ويكافئ القول بأن تكون القضية $ل$ صادقة أو أن تكون كذلك القضية الفصلية $(م ص)$.

(١) وتناظر في حساب الفئات الصيغة $١ (ص ح) = ص (ح ١)$

$= (١ ح) .$

(٢) وتناظر في حساب الفئات الصيغة التالية :

$١ + (ص + ح) = (ح + ١) + ص = (ح + ١) + (١ + ص) .$

الاستدلال الخاص بالقضايا

بعض أنواع الاستدلال المتعلقة بحساب القضايا :

سوف نعرض فيما يلي لأهم هذه الاستدلالات ، مع ملاحظة أن ما سوف نذكره منها لا يمثل حصراً كاملاً للاستدلالات المتعلقة بحساب القضايا ، بل سنكتفي بذكر بعض هذه الاستدلالات ، وبعبارة أكثر دقة ، سنقتصر على ذكر ما هو أساسي منها في حساب القضايا .

وسنقوم بتصنيف هذه الاستدلالات إلى فئتين :

(أ) فئة تتعلق بالاجراءات والعلاقات الخاصة بحساب القضايا .

(ب) فئة تتعلق باستخدام قوائم الصدق .

وفيما يلي تفصيل ذلك : —

أولاً - بعض الاستدلالات القائمة على الاجراءات

والعلاقات الخاصة بحساب القضايا

(أ) استدلالات قائمة على اللزوم :

١ - (\supset د ل) . \supset : د : ل (١)

وتقرأ : إذا كانت القضية \supset تستلزم القضية ل ، وكانت \supset صادقة ، فإنه يلزم

(١) أو تكتب أيضاً : [(\supset د ل) . \supset د ل] .

عن هذا أن تكون القضية ل صادقة (١). ومعنى ذلك إثنا قد استدللنا على صدق القضية ل بناء على صدق القضية و التي تستلزمها . وهكذا فنحن يمكننا أن نستدل على صحة قضية ما مثل ل ، لو جعلناها تالياً في قضية لزومية ، للقدم فيها (مثل و) قضية صادقة . وبما أن الحكم في القضية اللزومية — كما سبق أن أوضحنا — يتلخص في :

- (أ) أن صدق للقدم يستلزم صدق التالي .
- (ب) وأن صدق التالي لا يستلزم صدق للقدم .
- (ح) وأن كذب للقدم لا يستلزم كذب التالي .
- (د) أن كذب التالي يستلزم كذب للقدم .

فإننا نستنتج أن الصيغة التالية :

$$٢ - (و \supset ل) . ل : د : و$$

تعبّر عن استدلال غير صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية و تستلزم القضية ل ، وكانت ل قضية صادقة ، لزم عن هذا أن تكون و قضية صادقة أيضاً ، وهو استدلال غير صحيح لأننا لا نستطيع الاستدلال على صدق القضية و ، لو كانت مقدماً في قضية لزومية ، بناء على صدق التالي (ل) في تلك القضية ، وإلا خالفنا القاعدة الثانية من قواعد اللزوم . أو بعبارة أخرى ، لأن (و \supset ل) لا تعني (ل \supset و) ، أو لأن اللقمتين في هذه الصيغة اللزومية لا تستلزمان النتيجة .

(١) وقد عرفت هذه القضية الاستدلالية في المنطق باسم قاعدة الإثبات Modus Poens أو بمعنى أدق قاعدة الإثبات بالإثبات Modus ponendo ponens أو الوضع بالوضع .

٣ — كما نستنتج أن الصيغة التالية :

(٥ د ل) . - ٥ : ٥ : ٥ - ل

تعبر عن إستدلال غير صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية ٥ تستلزم القضية ل ، وكانت القضية ٥ كاذبة ، ترتب على ذلك كله أن تكون القضية ل كاذبة والاستدلال غير صحيح لأننا لا نستطيع الإستدلال على كذب التالي في قضية اللزوم بناء على كذب اللقمة فيها وإلا خالفنا القاعدة الثالثة من قواعد اللزوم .

وبعبارة أخرى نقول أن الصيغة الرمزية السابقة تعبر عن إستدلال غير صحيح لأن (٥ د ل) لا تعنى (٥ د ل) ، أو بصفة عامة لأن المقدمتين في هذا الاستدلال لا تستلزمان النتيجة .

٤ — كما نستنتج أن الصيغة التالية :

(٥ د ل) . - ل : ٥ : ٥ - ٥

تعبر عن إستدلال صحيح . وتقرأ : إذا كانت القضية ٥ تستلزم القضية ل ، وكانت القضية ل كاذبة ، لزم عن ذلك أن تكون القضية ٥ كاذبة أيضاً . ومعنى ذلك أننا قد إستدلنا على كذب قضية ما مثل ٥ ، حين وضعناها مقدماً في قضية لوجية ، والتالى فيها (مثل ل) قضية كاذبة .

وهكذا لو لحصنا الصيغ اللزومية السابقة ، واعتبرناها من بين الصيغ الأساسية التى تعبر عن الإستدلال ، الصحيح منه وغير الصحيح ، لحصلنا على : —

١ — (٥ د ل) . - ٥ : ٥ : ٥ - ل (استدلال صحيح)

٢ — (٥ د ل) . - ل : ٥ : ٥ - ٥ (استدلال غير صحيح)

٣ — (٥ د ل) . - ٥ : ٥ : ٥ - ل (استدلال غير صحيح)

٤ — (٥ ٤ ل) ل : د : ن : ٥ (استدلال صحيح)

الآن ، لو كانت لدينا الصيغ اللزومية التالية مثلاً : —

١ — (م د ن) م : د : ن

٢ — (م د ن) ن : د : م

٣ — (م د ن) م : د : ن

٤ — (م د ن) ن : د : م

٥ — (م د ن) ن : د : م

وأردنا أن تبين ما إذا كانت معبرة عن إستدلالات صحيحة أم لا ، فإننا نلجأ إلى تحويل هذه الصيغ بقدر الإمكان إلى الصيغ العامة اللزومية المعبرة عن الاستدلالات بحيث تصبح الصيغة التي تتحول إلى صيغة أساسية معبرة عن إستدلال صحيح ، هي بدورها صيغة لزومية معبرة عن إستدلال صحيح ، وإلا كانت معبرة عن إستدلال غير صحيح . وذلك كما يلي :

١ — في الصيغة الأولى : (م د ن) م : د : ن

لو وضعنا م بدلاً من (م) ، ل بدلاً من (ن) فإننا نحصل على : —

(٥ ٤ ل) ٥ : د : ل

وهي الصيغة الصحيحة الأولى من الصيغ اللزومية الأساسية الأربع . ومن ثم فالصيغة الأصلية تكون كذلك معبرة عن إستدلال صحيح .

٢ — في الصيغة الثانية : (م د ن) ن : د : م

لو وضعنا م بدلاً من (م) ، ل بدلاً من (ن) ، لحصلنا على :

(٥ ٤ ل) ٥ : ل : ن

وهى الصيغة الرابعة الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية السابقة ، ومن ثم فالصيغة الأصلية تكون كذلك صيغة لزومية معبرة عن استدلال صحيح .

٣ — وفى الصيغة الثالثة : (م د ن) م : د : ن —

لو وضعنا د بدلا من (م) ، ل بدلا من (ن) ، لحصلنا على : —

(م د ل) م : د : ل

وهى الصيغة الثالثة غير الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية . وعلى ذلك فالصيغة الأصلية لا تعبر عن استدلال صحيح^(١) .

٤ — وفى الصيغة الرابعة : (م د ن) ن : د : م —

لو وضعنا د بدلا من (م) ، ل بدلا من (ن) لحصلنا على : —

(م د ل) ن : د : ل

وهى الصيغة الثانية غير الصحيحة من الصيغ الأربع الأساسية . وعلى ذلك فالصيغة الأصلية معبرة عن استدلال غير صحيح^(٢) .

• — وفى الصيغة الخامسة :

(م د ن) ن : د : م

لو وضعنا ق بدلا من (م) ، ل بدلا من (ن) لحصلنا على : —

(م د ل) ن : د : ق

(١) والخطأ هنا راجع إلى إقامة اللزوم على نفي المقدم .

(٢) والخطأ هنا راجع إلى إقامة اللزوم على إثبات التالى .

وهذه الصيغة ليست واحدة من الصيغ الأربع السابقة الأمامية ، لكنها صيغة غير صحيحة يقينا لأن المقدم فيها وهو (ق د ل) لا يستلزم أن تكون (- ق) ، ولا أن تكون كذلك (ق) .

(ب) إستدلالات قائمة على الفصل (الجمع) للنطقي :

أولا — الفصل الضعيف

١ — (ق ٧ ل) \equiv - ق - ل .

وتسمى عادة هذه للصيغة بإسم قانون نفي للفصل Negation of a dis junction كما تعرف أحيانا بأحد قانوني دي مورجن . وتقرأ : إن نفي القضية الفصلية ، مكافئ للقضية العطفية التي تكون القضايا المعطوفة فيها ، هي سوالب القضايا المفصلة .

أو تقرأ : إن كذب القول بأن تكون « ق » صادقة أو « ل » صادقة ، أو هما معاً صادقتين ، يكافئ قولنا أن تكون كل من القضييتين ق ، ل كاذبتين معاً . ويمكن توضيح ذلك بشكل كما يلي :

إن القضية الفصلية (ق ٧ ل) تعني :

١ — أن ق ، ل صادقتان معاً .

٢ — أو أن إحداها فقط صادقة والأخرى كاذبة .

فلو كانت القضية الفصلية كاذبة ، ترتب على ذلك كذب الاحتمالين السابقين ، والقول الوحيد الذي يكذب الاحتمالين السابقين هو الذي ينص على كذب القضييتين ق ، ل في وقت واحد ، أي (- ق - ل) .

٢ — (ق ٧ ل) . ق : د : ل .

وتقرأ : إن القول بصدق إحدى القضيتين ق ، ل على الأقل ، والقول بأن القضية ق كاذبة ، كل هذا يلزم عنه أن تكون القضية ل صادقة .

وهو استدلال لزوم صحيح ، لأن المقدم فيه يتكون من مقدمتين ، إحداهما فصلية (ق ٧ ل) وتفيد صدق « ق » أو صدق « ل » أو صدقهما معاً . والثانية تفيد كذب ق . إذن فلا بد وأن تكون ل صادقة . ومن ثم فالنتيجة تلزم لزوماً طبيعياً وضرورياً عن اللقدمات ، طالما أن نقي أحد البديلين يترتب عليه بالضرورة صدق البديل الآخر . وهكذا لو أردنا أن نستدل على صدق قضية ما مثل « ل » ، جعلناها أحد البديلين في قضية فصلية ، وأضفنا إلى ذلك كذب البديل الآخر .

٣ — (ق ٧ ل) . ل : د : ق

وتقرأ : إن القول بصدق إحدى القضيتين ق ، ل والقول في الوقت نفسه بأن القضية ل كاذبة ، كل هذا يلزم عنه أن تكون القضية ق صادقة .

وهذا استدلال لزوم صحيح ، وتتضح صحته من الطريقة التي إتبعنا في الصيغة السابقة .

٤ — (ق ٧ ل) . ق : د : ل .

وتقرأ : إن القول بأن إحدى القضيتين د ، ل صادقة على الأقل ، والقول في الوقت نفسه بأن القضية د صادقة ، كل هذا يلزم عنه أن تكون القضية « ل » كاذبة .

وهذا استدلال لزوم غير صحيح ، لأن القضية الفصلية (ق ٧ ل) تعني صدق واحدة على الأقل من القضيتين البديلتين أو المنفصلتين د ، ل مع إمكان صدقهما

معاً ، وعلى ذلك فإتينا نستطيع — من صدق القضيتين البديلتين — أن نستنتج صدق الأخرى أو كذبها .

وعلى ذلك فإن كذب ل ليس بالنتيجة الضرورية ، بل هي محتملة فقط ، لأنها تكون صادقة . وهكذا فإتينا نستنتج أيضاً عدم صحة الاستدلال الذى تعبر عنه الصيغة التالية : —

(٧٧ ل) . ص : د : ل .

٥ — (٧٧ ل) . ل : د : ص

وتقرأ : إن القول بصدق إحدى القضيتين ق ، ل ، ثم القول بأن القضية ص صادقة فعلاً ، لا يلزم عنه كذب ق لأنها قد تكون صادقة أو كاذبة ، ومن ثم فإن هذه الصيغة لا تعبر عن استدلال لروى صحيح .

كما يمكننا أن نستنتج أيضاً ، للسبب المذكور فى الصيغة السابقة عدم صحة الاستدلال الذى تعبر عنه الصيغة التالية :

(٧٧ ق) . ل : د : ق

وتلخيصاً لما سبق يمكننا القول بأن أى استدلال يأخذ صورة بمائلة لإحدى الصيغ الثلاث الأولى ، يكون استدلالاً صحيحاً . وأى استدلال يأخذ صورة بمائلة لإحدى الصيغتين الأخيرتين يكون استدلالاً غير صحيح .

وهكذا فنحن نستطيع معرفة ما إذا كان الاستدلال صحيحاً أو غير صحيح ، حين تقارنه بصيغ الاستدلالات الصحيحة . ولناخذ — لزيادة الإيضاح — المثال التالى : —

(هذا الراسب الأسود يحتوى على سلفات الزئبق أو سلفات الرصاص . لكن التجربة أثبتت أنه خال من الرصاص . إذن فهو يحتوى على الزئبق) .

معرفة ما إذا كان هذا الاستدلال صحيحاً أم لا ، نضع بدلاً من العبارة (هذا
 مناسب الأسود يحتوى على سلفات الزئبق) الرمز « ق » ، وبدلاً من العبارة
 (وهو يحتوى على سلفات الرصاص) الرمز « ل » ، ومن ثم تكون صورة العبارة
 كلها على النحو الآتي :

$$(ق \vee ل) . ل : د : ل$$

وهي صيغة تدل على استدلال صحيح .

ثانياً : الفصل الثماني

مثل :-

$$١ - (ق \vee \overline{ل}) . ق : د : ل$$

$$٢ - (ق \vee \overline{ل}) . ل : د : ق$$

$$٣ - (ق \vee \overline{ل}) . ق : د : ل$$

$$٤ - (ق \vee \overline{ل}) . ل : د : ق$$

وهي جميعاً استدلالات صحيحة .

(ج) استدلالات قائمة على التناقض :

وسنذكر في هذا العدد أربع صيغ أساسية هي :-

$$١ - (ق \vee ل) . ق : د : ل$$

وتقرأ : إن القول باستحالة صدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بصدق
 القضية ق في الوقت نفسه ، يلزم عنه أن تكون القضية ل كاذبة . وهي صيغة تعبر

عن استدلال صحيح لأن المقدمة الأولى في هذه الصيغة تقرر عدم إمكان صدق القضيتين ق ، ل معاً . في حين تقرر للمقدمة الثانية فيها (وهي ق) أن إحدى القضيتين وهي « ق » صادقة . وعلى ذلك تكون الثانية كاذبة . وهي نتيجة تلزم عن المقدمتين . ومن ثم فالاستدلال صحيح .

٢ — (ق . ل) . ل : د : ق —

وتقرأ : إن القول باستحالة صدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بصدق القضية ل في الوقت نفسه ، يلزم عنه أن تكون القضية ق كاذبة . وهي صيغة تعبر عن استدلال صحيح لنفس السبب السابق .

٣ — (ق . ل) . ق : د : ل —

وتقرأ : إن القول بعدم إمكان صدق القضيتين ق ، ل معاً ، ثم القول بكذب القضية ق ، يلزم عنه أن تكون ل صادقة .

وهي صيغة تعبر عن استدلال غير صحيح لأن المقدمة الأولى تفيد عدم صدق القضيتين ق ، ل معاً ، لكنها لا تفيد عدم كذبهما معاً . أى لو كانت إحداها صادقة للزم عن ذلك كذب الأخرى ، أما إذا كانت إحداها كاذبة (ق) ، لما لزم عن هذا بالضرورة كذب الأخرى ولا صدقها ، فهي قد تكون صادقة وقد تكون أيضاً كاذبة . ومن ثم يمكننا كذلك أن نكتب الصيغة التالية :

٤ — (ق . ل) . ق : د : ل —

التي تعبر بدورها عن استدلال غير صحيح .

٤ — (ق . ل) . ل : د : ق —

وهي صيغة تعبر عن استدلال غير صحيح لنفس السبب السابق ، ومن ثم يمكننا
كذلك أن نكتب للصيغة التالية : —

— (ق . ل) : ل : د : ر : ق —

التي تعبر عن استدلال غير صحيح هي الأخرى .
وتلخيصاً لما سبق نقول أن أى استدلال يأخذ صورة مشابهة لإحدى الصيغتين
الأولتين (١ ، ٢) يكون صحيحاً ، وأى استدلال يأخذ صورة مشابهة لإحدى
الصيغتين الأخيرتين (٣ ، ٤) يكون غير صحيح .

(و) استدلالات قائمة على التكافؤ :

١ — التكافؤ الخاص باللزوم : مثل القول بأن (ق د ل) تكافئ .

(ل د ر ق) أي أن : (ق د ل) \equiv (ل د ر ق)

٢ — التكافؤ بين اللزوم والفصل :

مثل : — (ق د ل) \equiv (ر ق ل)

ونقرأ : إن القول بأن القضية ق تستلزم القضية ل ، يكافئ القول بأن تكون
ق كاذبة أو تكون ل صادقة . وبعبارة أخرى فإن اللزوم بين قضيتين يكافئ الفصل
بين نفي القـدم ، وبين التالي . وقد يتضح معنى هذا التكافؤ لو وضعنا بدلا من
التغيرات قضايا ذات معنى محدد وذلك كما يلي : لو وضعنا بدلا من ق العبارة (الطالب
مجتهد) ، وبدلا من ل (الطالب نجح في الامتحان) ، استطعنا أن نترجم هذه
الصيغة الرمزية إلى العبارة التالية :

إن القول « بأنه إذا كان الطالب مجتهداً ، نجح في الامتحان » ، يكافئ القول
بأن « الطالب إما أنه ليس مجتهداً ، أو أنه ناجح في الامتحان » .

٣ — التكافؤ بين الزوم والتنافر :

مثل : — (ق د ل) \equiv — (ق ٠ ل)

لأننا حين نقول : « إذا كانت ق صادقة ، ترتب على ذلك صدق ل » إنما نقول « إذا كانت ق صادقة فإن ل لا يمكن أن تكون كاذبة » ، أو نقول « إنه من الكذب القول بصدق ق وكذب ل ».

قائمة التكافئات :

هكذا أصبح في استطاعتنا أن نستدل على صدق قضايا مكافئة لقضية الزوم ، وذلك باستخدام النفي والفصل والتنافر ، بحيث يمكننا أن نضع القضية الأصلية ، والقضايا الثلاث المكافئة لها في قائمة واحدة على النحو الآتي :—

(ق د ل) \equiv (ل د ق) \equiv (ق ٧ ل) \equiv — (ق ٠ ل) .

وما فائدة هذه القائمة ؟ فائدتها تتضح حين تكون لدينا قضية ما تأخذ صورة إحدى هذه الصيغ المتكافئة ، فإننا نستطيع أن نستدل على صحة قضايا أخرى تأخذ أى صورة من صور الصيغ الأخرى المكافئة لها ، ولتأخذ لذلك مثلاً العبارة التالية ، ولنحاول أن نجد القضايا المكافئة لها :

(إنه إما أن يكون حسن الحظ ، أو أنه سوف يخسر المباراة)

ولنرمز للعبارة (إنه حسن الحظ) بالرمز « م » ، وللعبارة (إنه سوف يخسر المباراة) بالرمز « ن » . بذلك تتحول العبارة السابقة إلى الصيغة الرمزية التالية :—

• (م ٧ ن)

الآن إذا أردنا أن نحول هذه العبارة الفصلية إلى ما يكافئها من صيغ أخرى
فسوف نختار من قائمة التكافئات السابقة القضية الفصلية (ـ ق ٧ ل) ، ثم نضع
فيها بدلا من «ـ ق» الرمز «ـ م» ، وبدلا من «ـ ل» ، الرمز «ـ ن» وبذلك
نحصل على (ـ م ٧ ن) . ثم نقوم بمثل هذا الاستبدال بالنسبة لبقية التكافئات
فنحصل على :—

$$(ـ م ٧ ن) \equiv (ـ ن ٧ ل) \equiv (ـ م ٧ ن) \equiv (ـ م ٧ ن) .$$

وعلى ذلك فالقضايا الثلاث المكافئة لقضية الفصل هي :—

١ — (ـ م ٧ ن) ، أى : « إذا لم يكن حسن الحظ ، فسوف يخسر
المباراة » .

٢ — (ـ ن ٧ م) ، أى : « إذا لم يخسر المباراة ، فهو حسن الحظ » .

٣ — (ـ م ٧ ن) ، أى : « أنه لا يمكن أن يكون سيء الحظ ، ولا
يخسر المباراة في وقت واحد » .

وهي جميعاً تكافئ القضية الأصلية بمعنى أنها جميعاً تقول نفس الشيء الذى تقوله
القضية الأصلية ، وهكذا نستطيع أن نستدل على صدق القضية الأصلية ، بناء على
معرفتنا بصدق أية واحدة من هذا القضايا المكافئة ، أو العكس .

ومن الطبيعى أننا قد لا نحتاج دائماً إلى ذكر جميع القضايا المكافئة لقضية معينة ،
بل قد لا نحتاج إلا لواحدة فقط ، ولكن هي القضية اللزومية للمكافئة ، في هذه
الحالة لن نقوم بإبدال الرموز الخاصة إلا بالتعبير الأول (أو الثانى) فقط . هنا نجد
أن القضية اللزومية المكافئة للتعبير (ـ م ٧ ن) هي :

إما : ١ — $(\neg M \supset N)$

أو : ٢ — $(\neg N \supset M)$ وهي قضية اللزوم العكسى لها .

وهنا نلاحظ : أن قضية الفصل تكافئ قضية اللزوم التى تكون مقدمها نقياً

لأحد البديلين .

ولنأخذ مثلاً آخر : لنفرض أن لدينا التعبير الرمضى التالى : —

— $(M \cdot N)$

فإننا نلاحظ أن القضية المناظرة لها من حيث الصياغة — فى القاعدة سالفة

الذكر — هى :

— $(\neg M \cdot \neg N)$.

ولذا فنحن لو وضعنا فيها الرمز « م » بدلا من « ق » ، والرمز « ن » بدلا

من « ل » لحصلنا على :

$(M \supset N) \equiv (\neg N \supset \neg M) \equiv (\neg M \cdot \neg N)$.

ومن ثم تكون القضايا المتكافئة مع قضيتنا الأصلية هى : —

$(1) \overline{(M \supset N)}$

$(2) \overline{(\neg N \supset \neg M)}$

$(3) \overline{(\neg M \cdot \neg N)}$.

التكافؤ بين صور الاستدلال الصحيح :

إننا في المنطق الرمزي المعاصر لا نستدل فقط على صدق قضية ما ، بناء على صدق قضية أخرى مكافئة لها — على النحو سالف الذكر — بل نستدل كذلك على صحة استدلال ما ، بناء على صحة استدلال آخر صحيح مكافئ له في الصورة والصياغة . فالنتيجة التي نحصل عليها من أنواع التكافؤ السابقة ، هي أن صور الاستدلال الصحيح التي ذكرناها ، كلها متكافئة ، لأننا لو وضعنا مثلاً ، قضية اللزوم المكافئة للقضية الفصلية أو لقضية التناظر بدلاً من أى منهما في الصيغ التي تحتويها ، لحصلنا على واحدة من صورتى اللزوم الصحيح ، كما أننا لو وضعنا قضية اللزوم بدلاً من قضية لزومها العكسي ، فإننا نجد أن صورتى اللزوم تفتيان إلى صيغة واحدة ، كما رأينا من قبل . ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي :

(نحن نعلم أن هذا المحلول يحتوي على النجيز أو الزنك ، وقد أثبتت التجربة أنه خال من النجيز . ومن ثم فهو لابد وأن يحتوي على الزنك) .

أولاً : فإذا ما رمزنا إلى العبارة (هذا المحلول يحتوي على النجيز) بالرمز « م » ، وإلى العبارة (وهذا المحلول يحتوي على الزنك) بالرمز « و » لحصلنا على الصيغة الاستدلالية التالية : —

$$(م \vee ٧) - ٠ : م : ٥ : و$$

وهي كما نعرف صيغة استدلالية فصلية صحيحة .

ثانياً : الآن نضع بدلاً من (م ٧ و) عبارة اللزوم المكافئة لها وهي : —

$$(م - ٥ و)$$

ومن ثم تصبح الصيغة الاستدلالية على النحو الآتي : —

(- م د و) . - م : د : و

وهي صيغة إستدلالية صحيحة . ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا « ق » بدلا من « - م » ووضعنا « ل » بدلا من « و » ، فنحصل على :

(ق د ل) . ق : د : ل

وهي قاعدة الاثبات بالاثبات (أو الوضع بالوضع) Modus Ponendo Ponens التي تعبر عن استدلال لزومي صحيح كما ذكرنا من قبل .

هذا ويمكننا بالمثل أن نضع بدلا من (م و) في المثال السابق ، بقية الصيغ للكافئة لها في قاعدة التكافؤ السابقة .

وسنعرض فيما يلي لسكيفية الاستدلال على صحة بعض الصيغ الأكثر تركيبا ، وذلك باستخدام ما يسمى بالسلسلة اللزومية Implicative series أو متسلسلة الزوم .

متسلسلة الزوم :

وتأخذ عادة الصيغة العامة الآتية : -

(ق د ل) . (ل د م) : د : ق د م

وهي صيغة إستدلالية صحيحة . لأنها تستوفى الشروط الأساسية لللازم توفرها في أي متسلسلة لزومية صحيحة وهي : -

١ - أن المقدم (ق) في المقدمة الأولى (ق د ل) ، هو المقدم في النتيجة .

٢ - أن التالي (م) في المقدمة الثانية (ل د م) ، هو التالي في النتيجة .

٣ — أن القضية الأخرى في اللقدمتين ، أى التالى في المقدمة الأولى ، وللقدم في المقدمة الثانية هى قضية واحدة في اللقدمتين معاً ، أى « ل » . ومن الضروى أن تكون القضية الأخرى في اللقدمتين واحدة ، وإلا لم يكن باستطاعتنا أن نتجاوزها لى نربط بين القضيتين الأولى والأخيرة .

وعلى ذلك فكل استدلال يلتزم بهذه الشروط الثلاثة أو يستوفىها ، يكون استدلالاً صحيحاً .

وفى ما يلى أمثلة على بعض الاستدلالات الصحيحة التى تكون من هذا النوع :

أولاً : (ن د م) . (و د م) : د : (و د ن)

هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح ، ولكى تثبت ذلك علينا أن نردها إلى الصورة التى تستوفى الشروط السابقة . وستتبع فى ذلك الخطوات الآتية : —

١ — لى يكون اللقدم فى النتيجة هو اللقدم فى المقدمة الأولى ، تقوم بتغيير وضع اللقدمتين فنضع الأولى مكان الثانية ، والثانية مكان الأولى ، باستخدام قانون التبادل . وكما إتنا نقول فى قانون التبادل الخاص بالضرب أن (ق . ل ≡ ل . ق) ، فإننا نكتب فى هذه الحالة :

(ن د م) . (و د م) ≡ (م د م) . (و د ن)

ومن ثم تصبح الصيغة الأصلية على النحو الآتى : —

(و د م) . (ن د م) : د : (و د ن)

٢ — ثم بعد ذلك لى نحصل على قضية مشتركة بين اللقدمتين — تساعدنا على الاستمرار فى الاستدلال فإننا نضع بدلاً من المقدمة الثانية — وهى (ن د م) قضية اللزوم العكسى المكافئة لها ، وهى (م د ن) ومن ثم نحصل على : —

(و د م) . (م د ن) : د : و د ن

٣ — فإذا ما وضعنا بعد ذلك في هذه الصيغة الجديدة ، للتغيرات ق ، ل ، م بدلا من و ، م ، ن على الترتيب ، حصلنا على :-

(ق د ل) . (ل د م) : د : و د م

وهي صورة للسلسلة لزومية صحيحة تستوفي الشروط الثلاثة السابقة . وبما أن هذه الصيغة الإستدلالية الأخيرة — الصحيحة — تكافئ الصيغة الأولى بناء على ما اتخذناه من خطوات سابقة ، فإنه يلزم عن هذا أن تكون الصيغة الأولى الأصلية ، معبرة عن إستدلال صحيح ، أى تكون القدمتان فيها مستلزميتين للنتيجة بالضرورة .

ثانياً :

وأحيانا تكون متسلسلة اللزوم من أكثر من مقدمتين ، إذ أن عدد للقدمات في هذه الحالة لا يغير من أمر الإستدلال في شيء ، طالما أن الرابطة بينها متصلة غير مقطوعة . فإذا كانت لدينا قضية مثل « ل » تلزم عن قضية أخرى ، وتلك عن قضية ثالثة ، وهكذا حتى نصل أخيراً إلى اللقدم الأول في اللزوم ، مثل القضية « ق » ، فإننا نقول دائماً أن القضية « ل » تلزم عن القضية « ق » . ولتوضيح ذلك نأخذ الصورة العامة لمتسلسلة اللزوم وهي :

(ق د ل) . (ل د م) : د : (ق د م)

ثم نضيف إليها مقدمة ثالثة ، فنحصل على :-

(ق د ل) . (ل د م) . (م د ن) : د : (ق د ن)

وهي متسلسلة لزومية تدل على استدلال صحيح طالما أن النتيجة تلزم لزوماً طبيعياً وضرورياً عن اللقدمات .

ثالثاً :

كما تأخذ أحياناً متسلسلة اللزوم صورة أخرى مثل : —

$$(ق د ل) \cdot (ل د م) \cdot م : د : ق$$

ولا ريب أن هذه الصيغة تعبر عن إستدلال صحيح ، ويمكن توضيح ذلك كما يلي : —

١ — أن النتيجة التي تلزم عن اللقمتين الأولى والثانية هي : (ق د م) وذلك لأن :

$$(ق د ل) \cdot (ل د م) : د : ق د م \cdot$$

٢ — ثم نقوم بعد ذلك بتشكوين قضية عطفية من هذه النتيجة (ق د م) ، ومن اللقمة الثالثة في الصيغة الأصلية وهي (ـ م) . أو بعبارة أخرى نضرب نتيجة الصيغة السابقة $\times (ـ م)$ ، فنحصل على (ـ ق) ، وذلك لأن :

$$(ق د م) \cdot م : د : ق \cdot$$

تبعاً للقاعدة اللزومية القائلة بأن نفى تالي قضية اللزوم يستلزم نفى اللقمة . أما لو أخذنا الصيغة الاستدلالية التالية مثلاً : —

$$(ق د ل) \cdot (ل د م) : د : (ق د م)$$

نسرعان ما نلاحظ أنها لا تعبر عن إستدلال صحيح ، لأن هذه الصيغة ، صيغته

لزومية والمتسلسلة اللزومية الصحيحة هي التي تستوفي الشروط الثلاثة السابق ذكرها ، بحيث إذا لم تستوف أي شرط منها ، لن تكون الصيغة معبرة عن استدلال صحيح . وهذه الصيغة السابقة لا تستوف تلك الشروط ، لأننا حاولنا ترتيب قضايا اللزوم فيها ، لن نجد قضية مشتركة تساعدنا على الربط بين القضيتين الأخريين ربطاً لزومياً . ومن ثم فلا استدلال غير صحيح .

رابعاً :

كما تحتوي متسلسلة اللزوم أحياناً على الفصل (أو الجمع المنطقي) . ولكي نوضح ذلك علينا أن نذكر أولاً :

(أ) إن قضية اللزوم تكافئ قضية الفصل التي يكون أحد البديلين فيها نافية للمقدم في قضية اللزوم ، أي أن : —

$$(ق \supset د) \equiv - ق \supset د$$

(ب) وبالعكس قضية الفصل تكافئ قضية اللزوم التي يكون المقدم فيها نافية لأحد البديلين ، أي أن :

$$(ق \supset د) \equiv - ق \supset د$$

$$أو : (ق \supset د) \equiv - ق \supset د$$

ولنفرض الآن أن لدينا الصيغة التالية : —

$$(- م - ن) . (ن \supset و) : د : (- م - و)$$

وأردنا أن نقين ما إذا كانت تعبر عن استدلال صحيح أم لا ، فإننا نلجأ مثلاً إلى ما يأتي :

١ — نضع بدلا من قضايا الفصل في هذه الصيغة ، قضايا اللزوم المكافئة لها ، كما يلي : —

$$\therefore (-m \vee n) \equiv (m \supset n)$$

$$، \therefore (n \vee o) \equiv (-n \supset o)$$

$$، \therefore (-m \vee o) \equiv (m \supset o)$$

\therefore فنحن نحصل على الصيغة التالية : —

$$(m \supset n) \cdot (-n \supset o) : \supset : (m \supset o)$$

٢ — فإذا ما وضعنا متغيرات القضايا n, l, m بدلا من $m, -n, o$ ، على الترتيب لحصلنا على للتسلسلة الزومية الصحيحة التالية : —

$$(l \supset l) \cdot (l \supset m) : \supset : (l \supset m)$$

وهكذا نكون قد إستدلنا على صحة متسلسلة لزومية تحتوى على قضايا فصلية باستخدام قضايا لزوم مكافئة لها .

خامساً :

وقد تحتوى سلسلة اللزوم أحيانا على قضايا معبرة عن تنافر . ولذا فإننا عادة ما نلجأ في الإستدلال على صحتها إلى استخدام قضايا لزومية مكافئة للتنافر . وعلينا أولا أن نذكر :

(١) أن قضية اللزوم تكون مكافئة للتنافر الذى يكون أحد حدوده تقياً لتالى قضية اللزوم ، أى أن :

$$(L \supset V) \equiv (L \supset V)$$

(ب) وبالعكس ، قضية التنافر تكون مكافئة لقضية اللزوم التى ينفى فيها التالى ، واحدة من قضايا التنافر ، أى أن :-

$$(L \supset V) \equiv (L \supset V)$$

ولنفرض الآن أن لدينا الصيغة التالية :

$$(L \supset V) \cdot (M \supset N) : \supset : (L \supset N)$$

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن استدلال لزمى صحيح أم لا ، فإننا نتبع مثلا الخطوات التالية :-

١ — نضع بدلا من قضية التنافر « $(L \supset M)$ » ، قضية اللزوم المكافئة لها ، وهى $(L \supset M)$.

٢ — نضع بدلا من القضية الفصلية $(M \supset N)$ ، قضية اللزوم المكافئة لها ، وهى $(M \supset N)$. ومن ثم فإننا نحصل على الصيغة الزومية التالية :-

$$(L \supset M) \cdot (M \supset N) : \supset : (L \supset N)$$

٣ — فإذا ما وضعنا متغيرات القضايا : L ، M بدلا من « L » ، « M » ، « N » على الترتيب ، حصلنا على المتسلسلة الزومية الصحيحة التالية :-

$$(L \supset M) \cdot (M \supset N) : \supset : (L \supset N)$$

وهكذا نكون قد إستدلنا على صحة مقاربية لزومية تحتوى على قضية فصلية ، وقضية تنافر ، باستخدام قضايا لزوم مكافئة لها .

هذا ولا يفوتنا بعد ذلك أن نعرض للتعبير الرمزي لبعض صور الاستدلال القديمة ،
وذلك على النحو الآتي : —

أولاً : الاستدلال بتقابل القضايا :

(١) القضايا المتناقضة : مثل « هـ » ، « هـ » . وبما أن حكم القضيتين المتناقضتين
هو أنهما تصدقان معاً ولا تكذبان معاً ، فأنهما — بعبارة أخرى — تتنافران ،
ولذا فأتينا نكتب :

— (هـ - هـ) —

ونقرأ : إنه من الكذب القول بصدق القضية هـ وكذبها في الوقت نفسه .
كما يجبر عن التناقض كذلك — كما ذكرنا من قبل — بإسم قانون الوسط
المرفوع الذي ينص على أنه إما أن تكون قضية ما صادقة أو أن تكون القضية النافية
لها صادقة . ونحن عادة ما نرمز لهذا القانون بقضية الفصل التالية :

هـ - هـ - هـ .

فإذا كتبنا الصيغتين معاً ، استطعنا القول بأنه : إذا كانت القضيتان « هـ » ،
« هـ » متناقضتين ، كانت إذن :

— (هـ - هـ) . (هـ - هـ - هـ) .

↓

↓

لا تصدقان معاً إحداهما صادقة ، فلا

تكذبان معاً

وباختصار ، فالقضيتان في حالة فصل قوي ، بحيث أن واحدة فقط منهما تكون

صادقة ، فهما لا تصدقان معاً ، وتكون إحداها على الأقل صادقة ، ومن ثم فهما لا تكذبان معاً . وهكذا يمكننا الاستدلال على صدق أو كذب أية قضية ، لو عرفنا مدى صدق أو كذب القضية للتناقضة معها .

(ب) القضايا المتضادة :

القضيتان المتضادتان ، لا تصدقان معاً ، وقد تكذبان معاً ، لكننا لا نقول شيئاً عن كذبهما ، بل نتوقف عن الحكم وبالتالي عن الاستدلال في حالة الكذب . وبعبارة أخرى نقول في المنطق الحديث أن القضيتين المتضادتين متنافرتان ، لكنهما ليستا في حالة فصل . فإذا كانت هناك قضيتان متضادتان مثل « ل » ، « ل » ، عبرنا عن التضاد بينهما على النحو الآتي : —

— (ل . ل) —

ومن الواضح أن هذه الصيغة تعبر عن التنافر . وهكذا فإننا نفرق بين التعبير عن التضاد والتعبير عن التناقض ، بأن الصيغة للمعبرة عن التناقض تحتوي على تنافر وفصل ، أما الصيغة للمعبرة عن التضاد فلا تحتوي إلا على تنافر فقط .

(جـ) القضايا الداخلة تحت التضاد :

والقضيتان الداخلتان تحت التضاد ، لأنهما لا تكذبان معاً ، فلا بد وأن تعبّرا عن حالة الفصل إذا طالما أنهما لا تكذبان معاً ، فهناك ضرورة لصدق إحداها ، مع احتمال أو إمكان صدقهما معاً ، وهذا فصل ضعيف . وبصفة عامة لو كانت لدينا قضية هي « ل » ، وكانت القضية الداخلة معها تحت التضاد هي « ل » ، لما أمكننا أن نكتب إلا :

مثل : (ص) هو ليس بالمنزل

(ل) هو في الكلية

فإحدى هاتين القضيتين على الأقل تكون صادقة في حالة الفصل الضعيف ، مع إمكان صدقهما معاً . هكذا يتم التعبير عن الدخول تحت التضاد باستخدام شرط واحد من شرطى التناقض وهو الفصل . كما يتم التعبير عن التضاد باستخدام الشرط الآخر فقط ، وهو التنافر . أما التناقض الذى يتم التعبير عنه بالشرطين معاً (الفصل والتنافر) فهو أقوى علاقة للتقابل بين القضايا (١) .

ثانياً : الاستدلال بواسطة الإخراج :

والإخراج Dilemma نوع من البرهان ، ولذا فقد إهتم به المنطق الصورى ، وهو يمكن أن يأخذ إحدى الصور الآتية : —

١ — (ص د ل) . (م د ن) . (م ص) : د : ل ص ن

وتسمى هذه الصيغة بالإخراج البنائى المركب Complex Constructive Dilemma وتقرأ : لو كانت ص تستلزم ل ، وكانت م تستلزم ن ، وكانت إحدى القضيتين « ص » أو « م » صادقة ، فإنه يلزم عن ذلك كله أن تكون واحدة من القضيتين « ل » أو « ن » صادقة .

(١) ولقد حرصت على ذكر هذه الأنواع الثلاثة من التقابل هنا ، طالما أن كلا من التضاد والدخول تحت التضاد يعبر عن أحد شرطى التناقض . وسوف نذكر فى القاعة التى أوردناها فيما بعد الصيغ الرمزية التى تعبر بها عن التداخل .

$$٢ - (٧ \supset ل) \cdot (ل \supset م) \cdot (ل \supset م) : ل$$

وتسمى هذه الصيغة بالإخراج البنائي البسيط
Simple Constructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ل » تستلزم « م » ، وكانت « م » تستلزم « ل » ، وكانت « ل » صادقة أو « م » صادقة ، ترتب على هذا بالضرورة صدق « ل » .

$$٣ - (٧ \supset ل) \cdot (ل \supset م) \cdot (ل \supset م) : ل - ٧ - م$$

وتسمى هذه الصيغة بالإخراج الهدمي المركب
Complex Destructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ل » تستلزم « م » ، وكانت « م » تستلزم « ن » ، وكانت « ل » كاذبة أو « ن » كاذبة ، ترتب على هذا بالضرورة أن تكون « ل » كاذبة أو « م » كاذبة .

$$٤ - (٧ \supset ل) \cdot (ل \supset م) \cdot (ل \supset م) : ل - ٧ - م$$

وتسمى هذه الصيغة بالإخراج الهدمي البسيط
Simple Destructive Dilemma

وتقرأ : إذا كانت « ل » تستلزم « م » ، وكانت « م » تستلزم « ل » ، وكانت « ل » كاذبة أو « م » كاذبة ، ترتب على هذا بالضرورة كذب القضية « ل » .

كل هذه الصيغ الأربع ، هي صور أو صيغ لتسلسلات ثلومية صحيحة ، ومن ثم فإن أى استدلال يأخذ صورة أى واحدة من هذه الصيغ ، يكون بدوره استدلالاً صحيحاً .

ولتوضيح ذلك نأخذ بعض الأمثلة : —

(١) لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(م د ن) . (م د و) . (م ٧ م) : د : (ن ٧ و) .

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن إستدلال صحيح أم لا ، فإننا نضع المتغيرات التالية : « ن » ، « ل » ، « م » ، « ن » بدلا من « م » ، « ن » ، « م » ، « و » على الترتيب ، فنحصل على : —

(ن د ل) . (م د ن) . (م ٧ م) : د : ل ٧ ن

وهي صيغة الاحراج البنائى المركب التى تعبر عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فلاستدلال الأصلى صحيح .

(ب) ولنأخذ مثالا آخر : لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(ن د و) . (ن د و) . (ن ٧ ن) : د : و

وأردنا أن نتبين ما إذا كانت هذه الصيغة تعبر عن امتدلال صحيح أم لا ، فإننا نضع المتغيرات التالية : « ن » ، « ل » ، « م » بدلا من « ن » ، « و » ، « ن » على الترتيب فنحصل على : —

(ن د ل) . (م د ل) . (م ٧ م) : د : ل

وهي صيغة الاحراج البنائى المركب التى تعبر عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فلاستدلال الأصلى صحيح .

(ح) حينما ينفى الاحراج ، بدلا من أن يؤكد أو يثبت قضية أو أكثر في اللقدمات ، فإنه يسمى في هذه الحالة بالاحراج الهدى ، ولنأخذ للنال الآتى تعبرا عن ذلك : —

(ل د م) . (ن د و) . (م - و) : د : (ل - و - ن)

فهل هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح أم لا ؟ أو بعبارة أخرى هل تلزم النتيجة في هذه الصيغة بالضرورة عن المقدمات فيها ؟ للأجابة عن ذلك تقوم بعملية إستبدال مناسبة فنضع متغيرات القضية : و ، ل ، م ، ن بدلا من ل ، م ، ن ، و ، على الترتيب ، فنحصل على : -

(و د ل) . (م د ن) . (ل - و - ن) : د : (و - و - م)

وهي صورة الاحراج الهدى المركب المعبرة عن إستدلال صحيح ، ومن ثم فلا استدلال الأصلي صحيح .

ملحوظة : الواقع أن أهمية الاحراج الهدى تبدى في إظهاره وجود تنافر بين القضايا ، طالما أن (و - و - ل) مكافئة دائماً لقضية التنافر « (ل . و) » . ونحن في المثال السابق ، يمكن أن نضع « (ل . ن) » ، « (و - م) » بدلا من قضيتي الفصل ، فنحصل على :

(و د ل) . (م د ن) . (ل . ن) : د : (و - م)

وهي بدورها صيغة معبرة عن إستدلال صحيح .

(و) ولناخذ مثلاً آخر ، لو كانت لدينا الصيغة التالية :

(م د ن) . (م د و) - (ن . و) : د : م

وأردنا أن نعرف مدى صحة الاستدلال الذي تعبر عنه ، فإننا نتبع الخطوات

التالية : -

١ - لو وضعنا المتغيرات : و ، ل ، م ، ن بدلا من م ، ن ، و ، على الترتيب ،

لحصلنا على : -

$$(u \rightarrow l) \cdot (u \rightarrow m) \cdot (l \rightarrow m) : u \rightarrow u$$

٢ — ثم لو وضعنا في هذه الصيغة بدلا من قضية التناظر « $(l \rightarrow m)$ » ،
قضية الفصل للكافة لها ، وهي : « $(l \rightarrow m)$ » ، لحصلنا على : —

$$(u \rightarrow l) \cdot (u \rightarrow m) \cdot (l \rightarrow m) : u \rightarrow u$$

وهي صورة الاحراج المهدى البسيط المعبرة عن استدلال صحيح ، ومن ثم
فالاستدلال الأصلي استدلال صحيح .

ملحوظة : في كثير من الاستدلالات التي يمكن ردها إلى الاحراج ، قد يكون
من الأسر علينا لو بحثنا عن صحة الاستدلال لتحويله إلى متسلسلة لزوم . ويكون
الأمر يسيرا في حالة التعبير الرمزي عن الاحراج المركب ، لكن حينئذ تكون النتيجة
قضية بسيطة كما هو الحال في الاحراج البسيط ، فإنه ينبغي تحويل هذه القضية
البسيطة إلى قضية لزوم ، وهذا يتم باستخدام قانونين منطقيين يعبران عن التكافؤ ،
هما : —

$$1 - u \equiv (u \rightarrow u)$$

$$2 - u \equiv (u \rightarrow u)$$

وهكذا يمكن تحويل « u » (أو كذلك « u ») دائماً إلى قضية لزوم .

قائمة

بأهم القوانين الأساسية لمنطق القضايا والاستدلالات

الخاصة بها (١)

١ - قانونا التبادل : Laws of Commutation

ونضيف هنا إلى القانونين السابق ذكرهما عن التبادل في القائمة السابقة
[وهما : $(\text{و} \cdot \text{ل} \equiv \text{ل} \cdot \text{و})$ ، $(\text{و} \vee \text{ل} \equiv \text{ل} \vee \text{و})$] ، القانونين
التاليين :

$$(1) \quad (\text{و} \overline{(\text{ل})}) \equiv (\overline{(\text{و})} \text{ل})$$

وهو تعبير عن التبادل في حالة الجمع القوي .

$$(2) \quad (\text{و} \equiv \text{ل}) \equiv (\text{ل} \equiv \text{و})$$

٢ - قانون اللزوم العكسي Law of counter - implication

$$(\text{و} \supset \text{ل}) \equiv (\text{ل} \supset \text{و})$$

٣ - قانون النفي المزدوج Law of double Negation

$$\text{و} \equiv \neg \neg \text{و}$$

(١) هذه القائمة مكملة للقائمة السابق ذكرها والتي كانت تحتوى على سبعة
قوانين للقضايا ، ولذا فنحن لن نعود إلى تكرار هذه القوانين السبعة .

٤ — قانونا دي مورجن De Morgan's Laws (١)

ويمكن تسميتهما أحيانا بقانوني الازدواج (٢) ، وهما يدلان دلالة واضحة على العلاقة بين القضايا العطفية والقضايا الفصلية . ويمكن التعبير عنهما كما يلي : —

$$\text{أولا : } -(p \cdot q) \equiv -(p - q -)$$

وتقرأ : إن نفي القضية العطفية يكافئ القضية الفصلية التي تتكون من نفي القضيتين المعطوفتين في القضية العطفية . أو تقرأ : إن كذب القول بأن القضيتين « p » ، « q » صادقتان معاً ، يكافئ القول بكذب إحدى القضيتين « p » أو « q » (أو كذبهما معاً) .

ويمكن التعبير كذلك عن هذا القانون على النحو الآتي : —

$$-(p \cdot q) \equiv -(p - q -)$$

كما يمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

$$(1) -(p \cdot q) \supset -(p - q -)$$

$$(2) -(p - q -) \supset -(p \cdot q)$$

$$\text{ثانياً : } -(p - q -) \equiv (p \cdot q)$$

وتقرأ : إن نفي القضية الفصلية ، يكافئ القضية العطفية التي تتكون من نفي

(١) ويمكن الرجوع إلى منطق دي مورجن في عرض مبسط واضح ، وإلى

قوانينه في كتاب :

Kotarbinski, T. : Lecons sur L'histoire de La Logique

pp, 149 - 162

Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 236.

(٢)

القضيتين للفصولتين في القضية الفصلية . أو تعراً : إن كذب القول بأن إحدى القضيتين صادقة (أو صدقيهما معاً) ، يكافئ القول بكذب القضيتين ، ل معاً .

ويمكن التعبير عن هذا القانون كذلك على النحو الآتي : —

$$\cdot (J \vee v) \equiv (J - \cdot v -)$$

كما يمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

$$\cdot (J - \cdot v -) \supset (J \vee v) \quad (1)$$

$$\cdot (J \vee v) \supset (J - \cdot v -) \quad (2)$$

ومن الواضح أن ما ينطبق في هذه الحالة على القضية للمعبرة عن الفصل الضعيف ، ينطبق كذلك على القضية للمعبرة عن الفصل القوي . ولذا يمكننا أن نكتب كذلك :

$$\cdot (J - \cdot \underline{v} -) \equiv (J \cdot v) \quad (1)$$

$$\cdot (J \cdot \underline{v}) \equiv (J - \cdot \underline{v} -) \quad (2)$$

• — قانونا اللزوم المادى : Laws of Material Implication

وهما عبارتا من عبارات التكافؤ ، وتقدمان لنا تعريفين متميزين للزوم المادى :

$$\underline{\text{أولاً :}} \quad (J \supset v) \equiv (J - \cdot v -)$$

وتقرأ : إن القول بأن v تستلزم J ، يكافئ القول بكذب v أو صدق J .

$$\underline{\text{ثانياً :}} \quad (J \supset v) \equiv (J - \cdot v -)$$

وتقرأ : إن القول بأن v تستلزم J ، يكافئ القول بكذب أن تكون v صادقة ،

وأن تكون ل كاذبة في وقت واحد . ويوضح هذا القانون التكافؤ بين عبارتي
اللزوم والتناقض ، ويمكن التعبير عنه أيضاً على النحو الآتي : —

$$(L \supset V) \equiv (L \supset \neg V)$$

٦ — قانون عكس النقيض : Law of Contraposition

ويسمى أحياناً باسم مبدأ التناقل transposition ، ويتلخص معناه في القول
بأن القضية اللزومية تكون مكافئة للقضية اللزومية التي يكون المقدم فيها نفياً لتالي
للقضية الأصلية ويكون التالى فيها نفياً لمقدم القضية الأصلية . ويمكن التعبير عنه
بالصيغة التالية : —

$$(L \supset V) \equiv (\neg V \supset \neg L)$$

٧ — قوانين الاستغراق : Laws of Distribution

- (أ) $(L \supset V) \supset (L \supset V \cdot M) \equiv (L \supset V) \supset (L \supset M)$
- (ب) $(L \supset V) \supset (L \supset V \cdot M) \equiv (L \supset V) \supset (L \supset M)$
- (ج) $(L \supset V) \supset (L \supset V \cdot M) \equiv (L \supset V) \supset (L \supset M)$
- (د) $(L \supset V) \supset (L \supset V \cdot M) \equiv (L \supset V) \supset (L \supset M)$

٨ — قانونا الإنتاج (أو التصدير) : Laws of Exportation

$$(1) (L \supset V) \supset M \equiv (L \supset V \cdot M)$$

$$(2) (L \supset V) \supset M \equiv (L \supset V \cdot M)$$

وهذان القانونان يقرران أنه حيث يكون للتقدم في القضية اللزومية ، هو نفسه قضية عطفية ، فإن هذه القضية اللزومية تكون مكافئة لقضية لزومية يكون التالي فيها هو نفسه قضية لزومية .

٩ — قانونا التكافؤ للمادى : Laws of Material Equivalence

$$\underline{\text{أولا :}} \quad (J \equiv V) \equiv (J \supset V) \cdot (V \supset J) \cdot$$

وتقرر أن قضية التكافؤ ، تكون مكافئة لعبارة عطفية تعطف قضيتين لزوميتين .
كما يمكن التعبير عن القانون نفسه على النحو الآتي : —

$$\cdot (J \equiv V) \cdot \equiv \cdot (V \supset J) \cdot (J \supset V) \cdot$$

أو بطريقة اللزوم ، كما يلي : —

$$(1) \quad (J \equiv V) : \supset : (J \supset V) \cdot (V \supset J)$$

$$\cdot (J \equiv V) : \supset : (V \supset J) \cdot (J \supset V) \cdot \quad \text{وكذلك (ب)}$$

$$\underline{\text{ثانيا :}} \quad (J \equiv V) \equiv (J \cdot V) \vee (J - V - V - J)$$

وتقرر أن قضية التكافؤ ، تكون مكافئة لعبارة فصلية تكون من قضيتين مفصولتين أولاها قضية عطفية ، والأخرى فصلية تنفي القضيتين المفصولتين فيها ،

كما يمكن التعبير عن القانون نفسه على النحو الآتي : —

$$(J \equiv V) \cdot \equiv \cdot (J \cdot V) \vee (J - V - V - J)$$

أو بطريقة اللزوم على النحو الآتي : —

$$(1) \quad (J \equiv V) : \supset : (J \cdot V) \vee (J - V - V - J)$$

$$\cdot (J \equiv V) : \supset : (J \cdot V) \vee (J - V - V - J) \quad \text{وكذلك (ب)}$$

١٠ — قوانين تتعلق بتقابل القضايا : (خاصة بالتناقض والتداخل)

أولا : بالتناقض

$$١ - (L \equiv V) \equiv (L \equiv \neg V)$$

ويقرا : إن القول بأن صدق القضية V ، مكافئ لكذب القضية L ، يكافئ القول بأن كذب القضية V ، مكافئ لصدق القضية L .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

$$(١) (L \equiv V) : D : (L \equiv \neg V)$$

$$(ب) (\neg V \equiv L) : D : (L \equiv \neg V)$$

هذا وتضع صحة هذه الصيغ الثلاث للتناقض لو وضعنا بدلا من V ، L ، قضيتين إحداهما كلية موجبة A ، والأخرى جزئية سالبة O .

$$٢ - (L \supset V) \equiv (L \supset \neg V)$$

وتضع صحة هذا القانون من أحكام التناقض أيضا ، فلو كانت Q هي A (قضية كلية موجبة) ، وكانت L هي O (قضية جزئية سالبة) ، لترتب على هذا أن تقر الصيغة السابقة : إن القول بأن صدق « Q » يستلزم كذب (L) ، مكافئ لقولنا إن صدق (L) يستلزم كذب « Q » A .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : —

$$(١) (Q \supset L) : D : (L \supset \neg Q)$$

$$(ب) (L \supset \neg Q) : D : (Q \supset L)$$

$$- ٣ \quad (ق د ل) \equiv (ل د ق)$$

وهو تعبير عن التناقض على النحو الوارد في القانون السابق (رقم ٢) .
ويمكن التعبير عنه بالصيغتين اللزوميتين التاليتين : --

$$(١) \quad (ق د ل) : د : (ل د ق) .$$

$$(ب) \quad (ل د ق) : د : (ق د ل) .$$

ثانياً : بالتداخل :

$$(ق د ل) \equiv (ل د ق)$$

أى أن القول بأن صدق « ق » يستلزم صدق « ل » ، يكافئ القول بأن كذب « ل » يستلزم كذب ق . وهذا ما يتضح من أحكام التداخل . فلو كانت « ق » هي A ، وكانت « ل » هي I (قضية جزئية موجبة) فإننا نقرأ صيغة التكافؤ السابقة على النحو الآتى : إن القول بأنه إذا صدقت « ق » A ، صدقت « ل » I للتداخلة معها ، وليس العكس (وهذا ما يتضح من الشرط أبين التكافؤ) ، يكافئ القول بأنه إذا كذبت « ل » I ، كذبت « ق » A للتداخلة معها ، وليس العكس . (وهذا ما يتضح من الشرط أيسر التكافؤ) .

ويمكن التعبير عن هذا القانون بالصيغتين اللزوميتين الآتيتين : -

$$(١) \quad (ق د ل) : د : (ل د ق) .$$

$$(ب) \quad (ل د ق) : د : (ق د ل) .$$

١١ — أم القوانين الأساسية للزوم ، وقواعد الاستدلال القائم عليها :

أولاً : الصورة العامة لتسلسلة الزوم :

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) : \supset : (p \supset r)$$

وتسمى أحياناً هذه الصيغة ، بقانون القياس الشرطي للـزدوج
Law of Hypothetical Syllogism^(١) ، كما تسمى كذلك أحياناً بإسم مبدأ
تعدى الزوم Principle of Transitivity of Implication^(٢) .

ثانياً : القواعد الخاصة بالاستدلالات الزومية :

(١) قاعدة الإثبات بالإثبات Modus ponendo ponens

أو كما تسمى أحياناً قاعدة الوضع بالوضع :
(p \supset q) \cdot p : \supset : q

(ب) قاعدة الرفع بالرفع Modus tollendo tollens

(p \supset q) \cdot \neg q : \supset : \neg p

(ج) (p \supset q) \cdot (q \supset r) : \supset : (p \supset r)

(د) (p \supset q) \cdot (q \supset r) : \supset : (p \supset r)

ثالثاً : القواعد الخاصة بالاستدلالات الفصلية :

(١) (p \supset q) \cdot (q \supset r) : \supset : (p \supset r)

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P.38.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic. P.39.

وتسمى أحياناً بقاعدة القياس للفصلى Disjunctive Syllogism (١) .

$$(ب) \quad (L \vee \overline{V}) \cdot (L \vee \overline{D}) : L$$

$$(ج) \quad (L \vee \overline{V}) \cdot (L \vee \overline{D}) : \overline{L}$$

والقاعدتان الأخيرتان خاصتان بالفصل القوى .

رابعاً : القواعد الخاصة باستدلال الاحراج :

$$(أ) \quad (L \vee D) \cdot (M \vee D) : (M \vee V) \cdot (M \vee D) : L$$

وهى خاصة بالاحراج البنائى البسيط .

$$(ب) \quad (L \vee D) \cdot (M \vee D) : (M \vee D) : \overline{L} \cdot \overline{V}$$

وهى خاصة بالاحراج الهدى البسيط .

$$(ج) \quad (L \vee D) \cdot (M \vee D) : (M \vee D) : (L \vee V)$$

وهى خاصة بالاحراج البنائى للركب .

$$(د) \quad (L \vee D) \cdot (M \vee D) : (M \vee D) : \overline{L} \cdot \overline{V}$$

وهى خاصة بالاحراج الهدى للركب (٢) .

Mourant, J. A. : Formal Logic , P. 235

(١)

(٢) هذا ويمكن الرجوع إلى قائمة تفصيلية لهذه القوانين الخاصة بحساب

القضايا إلى كتاب :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 38.

ثانيا : الاستدلال باستخدام قوائم الصدق

قائمة الصدق Truth - table ، هي الجدول الذى تذكر فيه إمكانات صدق أو كذب قضية بسيطة أو أكثر ، وما يترتب على إتخاذ إجراء أو آخر حيالها ، لتكوين ما يسمى بدالات الصدق ، بغرض التعرف على إمكانات صدقها أو كذبها .

وأبسط صورة لقائمة الصدق هي التى نكوها لقضية واحدة بسيطة ، فلو كانت لدينا القضية « و » ، فإنها — شأنها شأن أية قضية أخرى — تكون إما صادقة أو كاذبة . ولذا فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتى : —

و
ص
ل

(القائمة رقم ١)

(ومنكتب « ص » للدلالة على حالة صدق القضية ، « ل » للدلالة على حالة كذبها) ومن ثم فإننا نقرأ القائمة السابقة كما يلى : — بالنسبة لأية قضية مثل « و » ، فهي قد تكون صادقة أو كاذبة . والواقع أننا نبدأ فى الإفادة من هذه القائمة وغيرها من قوائم الصدق المماثلة حين نتخذ إجراء أو عدة إجراءات إزاء هذه القضية الأصلية (و) ، مثل :

إجراء النفي : فبإتخاذ إجراء النفي مثلا إزاء القضية « و » ، نحصل على القضية « و - » المتناقضة مع القضية الأصلية . وتسمى القضية الجديدة (و -) عادة بدالة —

صدق (١) Truth - function القضية « ص » ، بمعنى أن صدقها أو كذبها ، إنما يتوقف على صدق أو كذب القضية الأصلية ص . وبعبارة أخرى فإننا نستطيع الاستدلال على صدقها أو كذبها ، بناء على معرفتنا بصدق القضية ص . وعلى ذلك فنحن إذا ما وضعنا قائمة الصدق السابقة لكي تشمل القضية الأصلية ونقيضها ، لحصلنا على القائمة التالية : —

ص	ص
ص	ص
ك	ك
ص	ك
ك	ص
(٢)	(١)
(القائمة رقم ٢)	

وتوضح هذه القائمة أن نفي قضية ما هو دالة صدق للقضية الأصلية ، ولذا فقد سمينا « - ص » بدالة الصدق ، كما نسمى « ص » بأساس — صدق Truth - ground (٢) هذه الدالة . وتسمى « ص ، ك » بقيم الصدق Truth - Values ، أو إمكانات — الصدق Truth - possibilities (٣) ، كما يسمى هذا الجدول كله بإسم « قائمة صدق » أو « لوحة صدق » الدالة « - ص » .

(١) Wahrheitsfunktion . إرجع إلى : « رسالة منطقية فلسفية » ،
للدفيج فيتجنشتين L. Wittgenstein ، الترجمة العربية لمؤلف هذا الكتاب ،
العبارة رقم (٥) .

(٢) Wahrheitsgrund .

(٣) Wahrheitsmöglichkeiten . أنظر : « رسالة منطقية فلسفية » ،
للدفيج فيتجنشتين (الترجمة العربية) ، العبارة رقم (٤٤) .

نفرض الآن أننا أردنا توسيع القائمة السابقة بإضافة نفي دالة الصدق السابقة ، فسوف نضيف إلى القائمة السابقة ، الدالة الجديدة « صـ » ، ومن ثم نحصل على :

صـ	صـ	صـ
ص	ك	ص
ك	ص	ك
(١)	(٢)	(٣)

(القائمة رقم ٣)

في هذه القائمة ، يمكننا مقارنة قيم الصدق الواردة في العمود (١) الخاص بالقضية (صـ) بقيم الصدق الواردة في العمود رقم (٣) الخاص بالدالة (صـ) ، فنلاحظ أن أول قيمة ترد في العمود رقم (١) ، وهي « ص » ، هي نفسها أول قيمة ترد في العمود رقم (٣) ، كما نلاحظ أن ثاني قيمة ترد في العمود الأول ، وهي « ك » ، هي نفسها ثاني قيمة ترد في العمود الثالث . وهذا يعني أنه إذا كانت « ص » صادقة ، كانت (صـ) صادقة ، وأنه إذا كانت « ك » كاذبة ، كانت (صـ) كاذبة . فإذا عرفنا أن أي قضيتين تشتركان في جميع قيم الصدق ، يكون بينهما تكافؤ ، فإننا نستدل في هذه الحالة تكافؤ القضيتين « ك » ، « صـ » ، ومن ثم نقول أن :—

$$ص \equiv صـ$$

ومن ثم نحصل على قانون النفي للزدوج ، السابق ذكره من قبل .

كيفية تكوين قائمة الصدق :

الواقع أن تكوين قائمة للصدق التي يكون أساس الصدق فيها قضية واحدة ،

كما في الأمثلة السابقة ، أمر سهل ميسور . إلا أن تكوين قائمة الصدق القائمة على أكثر من أساس (أو قضية) واحد ، أكثر صعوبة وتمقيداً ، ويتطلب منا استخدام قواعد معينة . ولتأخذ مثلاً لذلك كيفية تكوين قائمة صدق الدالة العطفية التالية :

(ج . ل) .

لنكتب القائمة الخاصة بهذه الدالة . فإننا نتبع الخطوات التالية : (١)

١ — الخطوة الأولى ، أن نكتب التعبير الخاص بالدالة ، أى : (ج . ل) ، ثم نكتب على يمينه متغيرات القضايا ، بالترتيب الذى تظهر عليه فى الدالة ، ثم نضع خطأ تحت الجميع فنحصل على :

ج ل
 . .

٢ — الخطوة الثانية ، أن نبدأ فى كتابة جميع قيم الصدق الممكنة بالنسبة لكل واحد من متغيرات القضايا ، على شكل أعمدة ، كل عمود تحت متغير القضية الخاص به . ولتستخدم الخطوط الرأسية لنكتب تحت كل عمود الأعمدة المطلوبة ، وذلك كما يلى :-

ج ل
 . .

ص ص

ص ك

ك ص

ك ك

٣. الخطوة الأخيرة ، أن نحسب CalcInte قيم صدق الدالة (و.ل) . وبما أن قيمة صدق الدالة ، هي دالة قيم صدق متغيرات القضية الأصلية التي تتكون منها الدالة ، أو بعبارة أخرى أن قيم صدق الدالة تتوقف على القيم الخاصة بأسس صدق الدالة (أى : و ، ل) ، فإننا نحصل على : —

	و.ل		ل	و
١	ص		ص	ص
٢	ل		ل	ص
٣	ل		ص	ل
٤	ل		ل	ل

(القائمة رقم ٤)

هذا ويلاحظ أننا قد نكتب أحيانا بدلا من « ص » (أى قضية صادقة) ، نكتب العدد « ١ » ، وبدلا من « ل » (أى : قضية كاذبة) ، نكتب « صفر » . وبذلك يمكننا كتابة قائمة الصدق على النحو الآتي : —

	و.ل		ل	و
١	١		١	١
٢	صفر		صفر	١
٣	صفر		١	صفر
٤	صفر		صفر	صفر

(القائمة رقم ٥)

كما يلاحظ أن إدخال متغيرات القضايا المنفية على قائمة الصدق ، أو بعبارة أخرى ،
إنخاذ إجراء النفي إزاء دالة الصدق أو جزء منها ، يتطلب منا إدخال تعديلات إضافية
على طريقة تكوين القائمة . ولنأخذ مثلاً لذلك ، كيفية تكوين قائمة صدق الدالة
العطفية التالية :

(١ - ٠ - ١)

	ق	ل	ق - ل	ل - ق	(١ - ٠ - ١)
١	ص	ص	ل	ل	ل
٢	ص	ل	ل	ص	ل
٣	ل	ص	ص	ل	ل
٤	ل	ل	ص	ص	ص

(القائمة رقم ٦)

وهكذا فنحن قد أضفنا عمودين جديدين أحدهما خاص بالدالة (- ق) ، والآخر
خاص بالدالة (ل - ل) لكي نكتب قيم صدق كل واحد من المتغيرين في الدالة .

الآن أصبحت لدينا قاعدتان أساسيتان تتعلقان بكيفية تكوين قوائم الصدق هما :

أولاً : أن عدد الصفوف rows (١) في قائمة الصدق يتناسب مع عدد المتغيرات
التي تظهر في دالات الصدق . فنحن مثلاً في حالة متغير قضية واحد فقط ، لن نحتاج
إلا إلى صفين فقط ، أحدهما خاص بالصدق « ص » والآخر بالكذب « ك » كما هو
الحال في القائمة رقم ١ والقائمة رقم ٢ .

(١) والمقصود بالصفوف هنا ، الصفوف الأفقية ، أما الصفوف الرأسية فتدعى أسميناها
من قبل باسم الأعمدة Columns . ولعل هذا هو السبب في أن بعض المناطقة يسمون
قائمة الصدق أحياناً باسم « مصفوفة الصدق » .

فإذا كان لدينا متغيران لقضيتين ، كما هو الحال في الدالة العطفية السابق ذكرها :
(ق . ل) ، فسوف نحتاج إلى أربعة صفوف ، كما يتضح ذلك من القائمتين
رقم ٤ ، ٥ .

ومما هو جدير بالملاحظة أن إتخاذ إجراء النفي بالنسبة لمتغير القضية في الدالة ،
وإن كان يزيد من عدد الأعمدة الرأسية كما في القائمة رقم ٣ ، أو القائمة رقم ٦ ،
إلا أنه لا يزيد من عدد القضايا الأصلية (أو أسس الصدق في الدالة) ، ومن ثم
فلا ترتب عليه أية زيادة في عدد الصفوف . فعدد الصفوف في القائمتين رقم ٢ ، ٣
واحد (وهو ٢) ، وعدد الصفوف في القائمتين ٤ ، ٦ واحد (وهو أربعة صفوف) .
لكن لنفرض أن لدينا أكثر من متغيرين للقضية في الدالة المراد تكوين قائمة
صدقها ، كم تكون عدد الصفوف المطلوبة في القائمة ؟

لو كانت لدينا ثلاثة متغيرات في الدالة ، فإننا سوف نحتاج إلى ثمانية صفوف ،
كما هو الحال في قائمة الصدق (غير الكاملة) ^(١) التالية ، الخاصة بالتعبير :

(ق د ل) . (ق م) : د : (ل م)

(١) لقد تعمدنا عدم ذكر القائمة كاملة لأن ما نهتم به في هذا المثال ، مجرد
إبراز عدد الصفوف الأقضية ، لا عدد الأعمدة الرأسية اللازمة لكتابة القائمة ، وهو
الأمر الذي سنذكره فيما بعد .

(۷۴ و ۷۵)

والصفوف الثمانية في حقيقتها تمثل إمكانات صدق وكذب كل قضية من القضايا الثلاث في حالة صدق وكذب القضيتين الآخرين . ولما كانت احتمالات صدق أو كذب القضية الواحدة فقط لا يزيد عن احتمالين ، لأن القضية الواحدة إما صادقة أو كاذبة ، ولما كان عدد القضايا التي تتكلم عنها في هذه الحالة هو ٣ ، هي (ق ، ل ، م) فإن مجموعات الصدق أو إمكاناته الخاصة بالقضايا الثلاث تكون :

$$٢ = ٨ .$$

أما في حالة وجود متغيرات عددها أكثر من ذلك في الدالة ، فإن عدد الصفوف سوف يعتمد في حسابه على نفس الطريقة التي ذكرناها آنفاً في حالة الصفوف الثمانية ، والتي يمكن أن نلخصها في الصيغة التالية ٢^ن . بحيث ترمز « ٢ » لعدد قيم الصدق الخاصة بأية قضية ، وتشير « ن » إلى عدد المتغيرات أو أسس الصدق في الدالة . وهكذا فإننا سوف نحتاج في حالة وجود أربعة متغيرات مثلاً في الدالة ، مثل (هـ ، ل ، م ، هـ) إلى : $٢ = ١٦$ صفاء يجب أن نملأ بقيم الصدق المناسبة ، أو بعبارة أكثر دقة ، بمجموعات الصدق المناسبة .

ثانياً : لكن كيف نملأ هذه الصفوف بقيم الصدق المناسبة على نحو صحيح وبدون أن نخطئ ؟ أو بعبارة أخرى : كيف نكون مجموعات الصدق الصحيحة التي تكون منها هذه الصفوف ؟ إن ذلك يتحدد أساساً على عدد الأعمدة الموجودة تحت أسس الصدق في القائمة . لذا لكي نتجنب الخطأ علينا أن نتبع القاعدة التالية : في قائمة الصدق المكونة من عمود واحد فقط يكون تغيير قيم الصدق واحدة تلو الأخرى ، فالأولى « ص » والثانية « ل » . وبلاحظ في القائمة رقم ٢ مثلاً أو رقم ٣ — كمثل ذلك — أن كلا منهما قائمة ذات عمود واحد ، لأننا لا نحبب إلا الأعمدة الواردة تحت أسس الصدق ، أو للمتغيرات الأصلية فقط (وهي « هـ » في

القائمتين السابقتين) ، لا الأعمدة الواردة تحت دالات الصدف ، وفي حالة قائمة الصدف ذات العمودين (مثل القائمة رقم ٤) يكون تغير القيم إثنين فائتين في العمود الأول (أى : ص ، ص — ثم ل ، ل) ، ثم واحدة فواحدة في العمود الثانى (أى : ص ، ل ، ص ...) ، ويلاحظ في هذه الحالة أن القائمة رقم ٦ مثلا هى قائمة ذات عمودين فقط .

وفي حالة قائمة الصدف ذات الأعمدة الثلاثة (لثلاثة متغيرات) — كما فى القائمة الناقصة رقم ٧ — يكون التغير أربعا فأربع فى العمود الأول (أى : ص ، ص ، ص ، ص — ثم ل ، ل ، ل ، ل) ، ثم إثنين فائتين فى العمود الثانى ، ثم واحدة فواحدة فى العمود الثالث .

أما فى حالة قائمة الصدف ذات « ن » من الأعمدة ، فىكون التغير كل (١ — ٢) ثم (٢ — ٣) فى العمود الأول . حيث تدل « ٢ » على عدد قيم الصدف فى القضية الواحدة وتدل « ن » على عدد متغيرات القضية . وهكذا فى قائمة الصدف ذات المتغيرات الخمسة مثلا ، يكون تغير القيم كل (١ — ٢) مرة ، ثم (٢ — ٣) مرة أخرى ، وهكذا فى العمود الأول . (أى كل ١٦ مرة ، لأن : $١٦ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$) ، ثم يكون التغير فى العمود الثانى كل ٨ مرات ، وفى العمود الثالث كل ٤ مرات وفى العمود الرابع كل مرتين ، حتى العمود الخامس فىكون كل مرة (١) .

(١) ولو كان عدد للمتغيرات أو كانت « ن » = ٤ فإن التغير فى العمود الأول يكون كل ٨ مرات وفى الثانى كل ٤ مرات وفى الثالث كل مرتين وفى الرابع كل مرة .

ولنمثل الآن لدالات الصدق الأساسية بواسطة قوائم الصدق الخاصة بها : —

١ — دالة الصدق الخاصة بالنفي (—) وقد ذكرنا قائمة صدقها من قبل
(القائمة رقم ٢) .

٢ — دالة الصدق الخاصة بالفصل . والفصل بين قضيتين يمكن أن يكون
فصلاً قوياً أو فصلاً ضعيفاً .

١ — الفصل الضعيف :

وتكتب قائمة الصدق الخاصة بالدالة الفصلية (—) على النحو الآتي : —

ل	و	ل	و
ص	ص	ص	ص
ص	ل	ص	ل
ص	ل	ل	ص
ل	ل	ل	ل

(القائمة رقم ٨)

(ب) الفصل القوي :

وتكتب قائمة الفصل القوي بين القضيتين ل ، ل ، أى قائمة صدق
الدالة الفصلية .

(— (٧) ل)

ل	و	ل (٧)	و
ص	ص	ل	و
ل	و	ص	ل
و	ل	و	ص
و	ل	ل	و

(القائمة رقم ٩)

ولكي تسهل علينا المقارنة بين نوعي الفصل القوي والضعيف ، يمكن كتابة الدالتين : (و ٧ ل) ، (و (٧) ل) في قائمة واحدة ، على النحو الآتي : -

ل	و	ل	و	ل (٧)	و
ص	ص	ص	و	ل	و
و	ل	ل	و	و	ل
ل	و	و	ل	و	و
ل	ل	ل	و	ل	و
الفصل القوي		الفصل الضعيف			

(القائمة رقم ١٠)

في هذه القائمة نلاحظ أن قضية الفصل الضعيف ، تكون صادقة دائماً ، ما لم تكن القضيتان للفصولتان كاذبتين معاً . أما قضية الفصل القوي ، فتأمل قضية الفصل الضعيف في كل مجموعات الصدق بإستثناء مجموعة قيم الصدق الأولى - (م ١٤ - منطق رمزي)

الواردة في الصف الأول — التي تكون فيها القضيتان المفصولتان صادقتين معاً .
إذ أن هذه المجموعة يستبعد بها الفصل للقوى طالما أنه ينص على ضرورة صدق واحدة
فقط من القضيتين للمفصولتين . هكذا تبين من القائمة السابقة الفرق بين الدالة
($\vee \vee \vee$) التي تقول : « \vee » أو « \vee » أو « \vee » ، وبين الدالة ($\vee (\vee \vee)$)
التي تقول : إما « \vee » أو « \vee » ، ولكن ليس معاً .

٣ — دالة الصدق الخاصة باللزام :

وتتكون قائمة الصدق الخاصة بها على الصورة العامة التالية : —

$\vee \vee \vee$		\vee	
\vee	\vee	\vee	\vee
\vee	\vee	\vee	\vee
\vee	\vee	\vee	\vee
\vee	\vee	\vee	\vee
\vee	\vee	\vee	\vee

(القائمة رقم ١١)

٤ — دالة الصدق الخاصة بالتكافؤ :

ويمكن بسهولة تكوين قائمة التكافؤ ، لو تذكرنا إنه لزوم متبادل ، وعلى
ذلك فتكافؤ قضيتين ، يكون هو الحالة التي تستلزم فيها كل قضية من القضيتين
القضية الأخرى .

ولقد عبرنا عن ذلك من قبل بالصيغة التالية :

$$(\vee \vee \vee) \cdot (\vee \vee \vee) \equiv (\vee \equiv \vee)$$

ومن ثم فإن علينا لكي نكتب قائمة التكافؤ ، أن نذكر الأعمدة الخاصة
بالقضيتين اللزوميتين المكافئتين ، وذلك كما يلي :—

$\text{و} \equiv \text{ل}$		$(\text{و} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{و})$		$\text{و} \supset \text{ل}$	$\text{ل} \supset \text{و}$	و	ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ل	ل	ص	ص	ل	ل	ل	ص
ل	ل	ل	ل	ص	ص	ص	ل
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ل	ل
(٤)	(٣)	(٢)	(١)				

(القائمة رقم ١٢)

وإن كانت بعض الكتب المنطقية ، تغفل ذكر الأعمدة ١ ، ٢ ، ٣ من القائمة
السابقة وتكتب دالة الصدق الخاصة بالتكافؤ السابق كما يلي^(١) :—

$\text{و} \equiv \text{ل}$	و	ل
ص	ص	ص
ل	ل	ص
ل	ص	ل
ص	ل	ل

(القائمة رقم ١٣)

هذا ويمكن تلخيص قوائم الصدق الخاصة بالمدالات الأساسية سالفة الذكر في

قائمة صدق واحدة على النحو الآتي^(١)

$\text{و} \equiv \text{ل}$	$\text{و} \supset \text{ل}$	$\text{و} (\overline{\text{و}})$	$\text{و} \vee \text{ل}$	$\text{و} \cdot \text{ل}$	$\text{و} - \text{ل}$	$\text{و} \text{ ل}$	
ص	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ك	ك
التكافؤ	اللزوم	الفصل الضعيف	الفصل الضعيف	المطف	النفي		

(القائمة رقم ١٤)

كما يمكننا فيما يلي تلخيص مجموعة القواعد التي إتبعناها حتى الآن في تكوين مجموعات الصدق في القوائم السابقة ، خاصة حين عملاً الأعمدة الموجودة تحت المدالات المختلفة : —

١ — إن دالة النفي ، تكون لها دائماً قيمة صدق مقابلة لقيمة صدق القضية للوجبة .

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.27.

٢ — إن الدالة العطفية ، لا تكون كاذبة قط إلا في حالة كذب واحدة أو أكثر من القضايا المعطوفة .

٣ — إن دالة الفصل الضعيف لا تكون صادقة إلا في حالة صدق واحدة أو أكثر من القضايا المفصلة .

٤ — إن دالة الفصل القوي لا تكون صادقة إلا إذا كانت القضايا المفصلة ذات قيم صدق مختلفة ومتقابلة .

٥ — إن دالة اللزوم لا تكون كاذبة إلا إذا كان مقدمها صادقاً وتاليها كاذباً .

٦ — إن دالة التكافؤ لا تكون صادقة إلا إذا كانت للمتكافئات قيم صدق متناظرة ، أى إذا كانت لها نفس قيم الصدق .

هذا ويلاحظ أننا نستطيع التعبير عن مجموعات الصدق في القائمة باستخدام الأقواس ، على النحو الذى قام به فنجشتين في كتابه « رسالة منطقية فلسفية » ، وذلك كما يلي : —

١ — أن نضع احتمالات أو إمكانات صدق القضية (هـ) أو كذبها بالشكل الآتى : —

ص (هـ) ل

وتقرأ : إن القضية (هـ) إما أن تكون صادقة أو كاذبة .

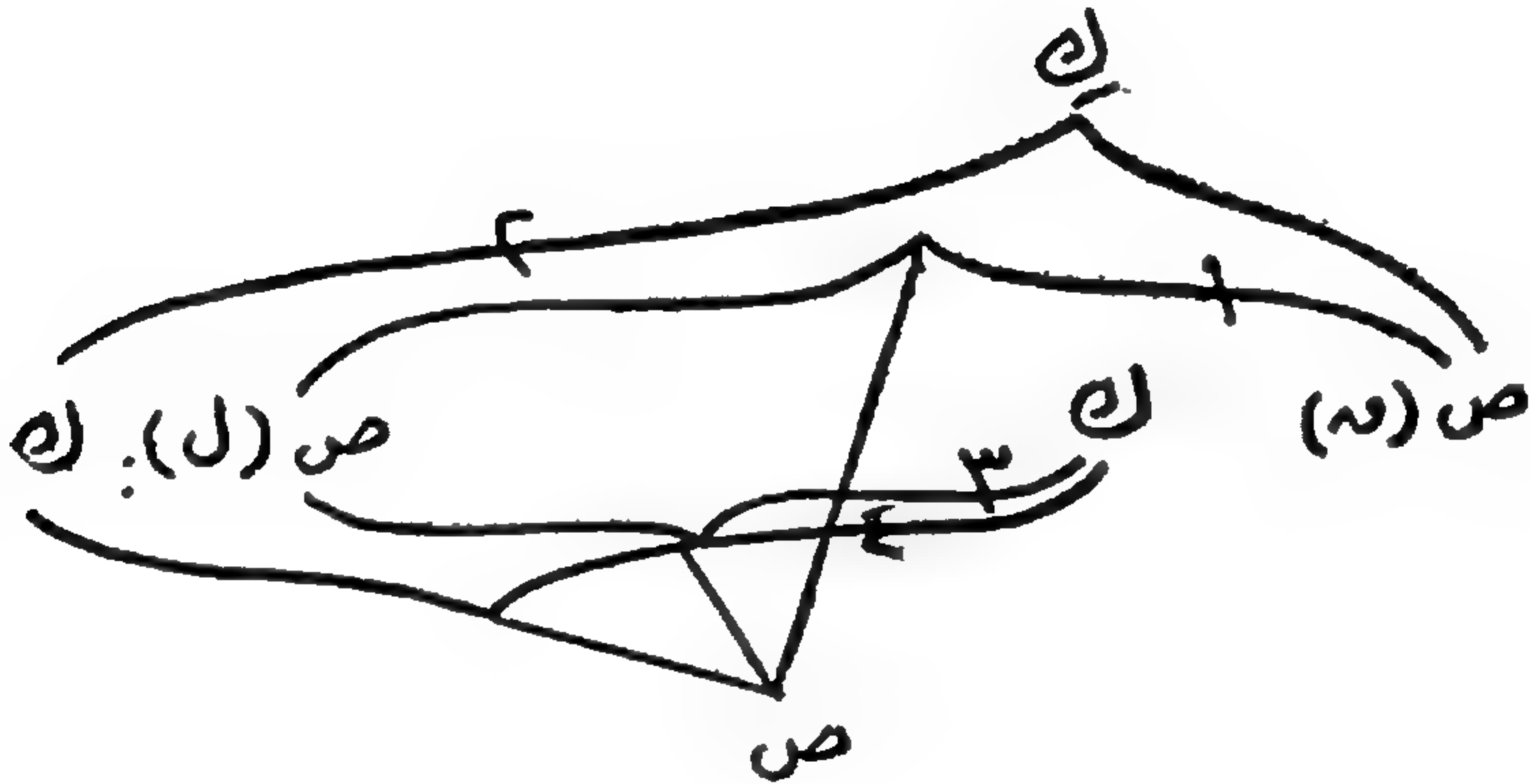
٢ — فإذا كانت لدينا قضيتان مثل هـ ، ل ، استطعنا أن نعبر عن مجموعات

صدقهما بالأقواس كما يلي : — (١)

(١) لدفيج فنجشتين : رسالة منطقية فلسفية . (الترجمة العربية) العبارة رقم



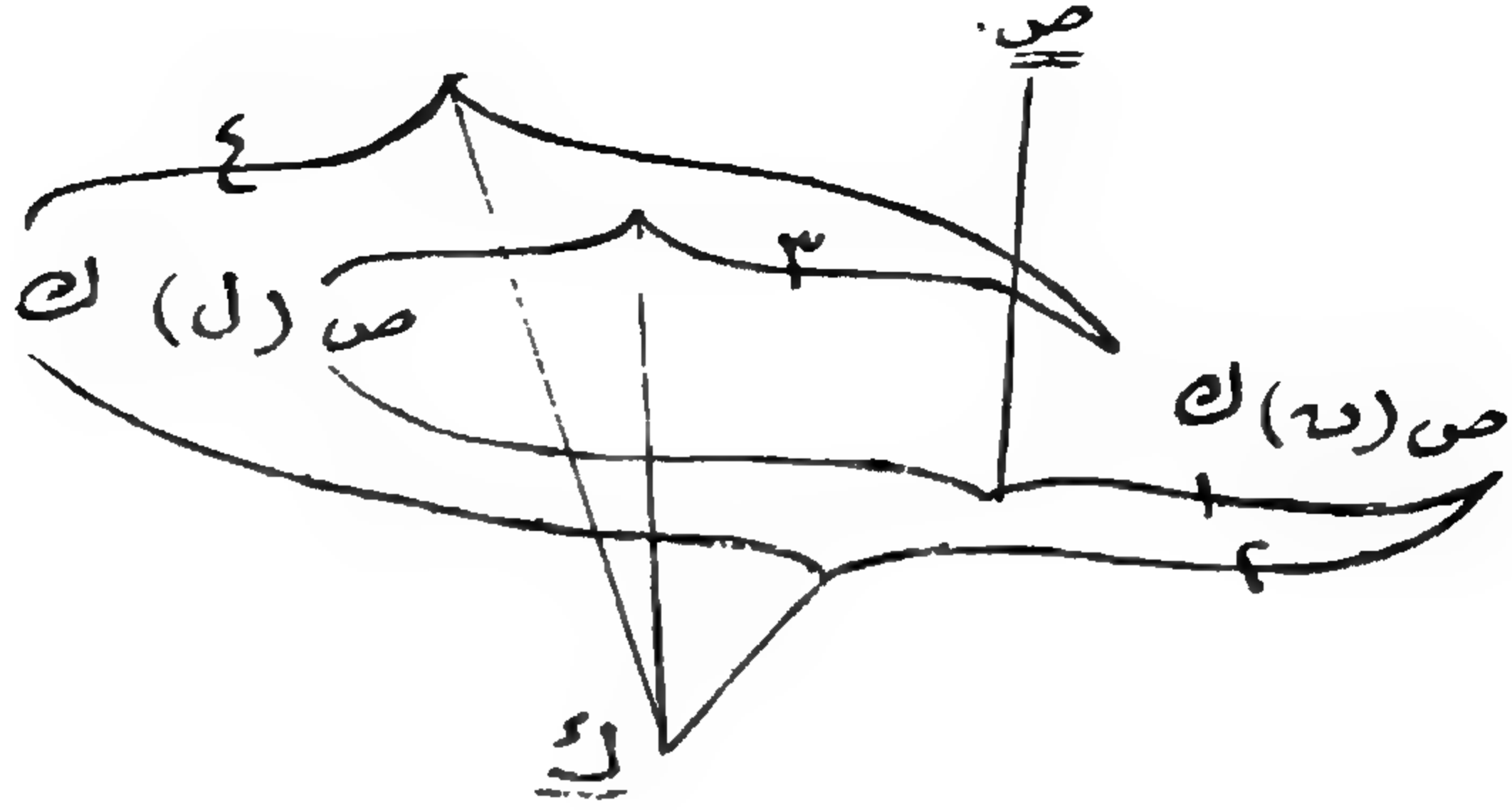
٣ — فإذا أردنا أن نعبر عن قائمة الصدق الخاصة بالدالة اللزومية (و دل) باستخدام الأقواس ، فإننا نعبر عن إلتقاء صدق أو كذب كل القضية (أو الدالة) مع مجموعات الصدق بالنسبة إلى متغيرات الصدق بواسطة الخطوط على النحو الآتي : — (١) .



ولكي يزداد فهمنا لهذه الطريقة ، نقارن هذه القائمة ، بالقائمة الكاملة لهذه الدالة (وهي رقم ١١) ، مع ملاحظة أن كل صف من صفوف القائمة الكاملة ، يناظر القوس المرقم بنفس الرقم الخاص بكل صف في القائمة رقم ١١ .

٤ — كما أننا لو أَرنا أن نعبر عن الدالة (و . ل) باستخدام طريقة فتجنشتين

في كتابة القائمة الخاصة بمجموعات الصدق ، لكتبتها كما يلي : — (١)



وبمقارنة أقواس هذه القائمة بالصفوف المناظرة لها ، والتي تحمل نفس الأرقام في القائمة الكاملة لهذه الدالة ، وهي لقائمة رقم ٥ ، نلاحظ أن القائمتين تزودانا بمضمون واحد ، وإن اختلف أسلوب التعبير .

ولنطور الآن طريقة تكوين قائمة الصدق بشكل أوسع يوضح لنا كيفية الإفادة منها في الاستدلال والبرهان . ولنأخذ للثل التالي ، وهو تكوين قائمة الصدق الخاصة بما أسميناه بمبدأ تعدى اللزوم التالي : —

$$\cdot (ه \supset ل) \cdot (ل \supset م) : م : (ه \supset م) \cdot$$

فنحن نكتب : —

١ — أولاً على اليمين للتغيرات القضية التي ترد في الدالة ، أو أسس الصدق فيها ، على حسب الترتيب الذي ترد عليه فيها (أى : ه ثم ل ثم م) .

٢ — ثم نكتب مختلف الدالات للنسبة ، والتي نحتاج إليها في القائمة ، متدرجين في ذلك من الأبسط إلى الأكثر تركيياً .

٣ — ثم نكتب أخيراً ، وفي أقصى اليسار ، التعبير القسوى ، أو الدالة المراد التعبير عنها بالقائمة ، وذلك على النحو الآتي للموضح في القائمة رقم ١٥ .

ويلاحظ فيما يتعلق بالقائمة السابقة ما يأتي : —

١ — إننا نحصل على قيم الصدق الخاصة بالدالات اللزومية في الأعمدة رقم : ٤ ، ٥ ، ٦ بالرجوع إلى القيم الواردة في الأعمدة رقم : ١ ، ٢ ، ٣ . وهكذا فالعمودان رقم ١ ، ٢ تلزم عنهما قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٤ . كما تلزم قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٥ عن القيم الواردة في العمودين ٢ ، ٣ . وتلزم أيضاً قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٦ عن القيم الواردة في العمودين ١ ، ٣ .

٢ — إن قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٧ ، الخاص بعطف قضيتين لزوميتين ، حصلنا عليها من القيم الموجودة في العمودين رقم ٤ ، ٥ .

٣ — إن قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٨ ، قد تمكنت بناء على القيم الواردة في العمودين رقم ٦ ، ٧ . مع ملاحظة أن القيم الواردة في العمود رقم ٧ تشكل المقدمات وأن القيم الواردة في العمود رقم ٦ هي التوالى ، بالنسبة للدالة اللزومية الواردة في العمود رقم ٨ . وبعبارة أخرى : لكي نحصل على أية قيمة صدق في العمود رقم ٨ ، فإننا نقرأ راجعين من العمود رقم ٧ إلى العمود رقم ٦ .

٤ — إننا نستطيع كتابة القائمة السابقة بطريقة مبسطة ، لو لاحظنا الآتي : —
إننا في القائمة السابقة رقم ١٥ ، وكذا في غيرها من القوائم التي يرد فيها أكثر من متغير للقضية تكتب « ص » أو « ل » أسفل الرمز الدال على الرابطة للمنطقية ،

سواء أ كانت رابطة لزوم مثل « د » أو فصل مثل « ٧ » أو غير ذلك . فنلاحظ مثلا في العمود رقم ٤ في القائمة السابقة — في الصف الأول — أننا قد كتبنا « ص » تحت رابطة اللزوم بين « ٧ » ، « ل » ، وليست تحت « ٧ » أو « ل » ، وذلك كما يلي : —

٧ د ل
ص

وطى ذلك فوجود « ص » أسفل الرابطة « د » لا يعنى أن ٧ صادقة أو أن ل صادقة ، إنما يعنى أن (٧ د ل) هى عبارة صادقة .

وبعبارة أخرى ، فالقيم للوجود في الأعمدة لا تعبر عن صدق أو كذب القضايا الداخلة في تكوين الدالة ، بل تعنى صدق أو كذب الدالة بناء على صدق أو كذب أسس صدقها .

وبناء على هذه الملاحظة السابقة يمكننا تبسيط القائمة السابقة على النحو الآتى :-

٧	ل	م	(٧ د ل) • (ل د م) : د : (٧ د م)				
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ك	ص	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ك	ل	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٧	٥	٨	٦

(القائمة رقم ١٦)

ومن الممكن التعبير بشكل أكثر تبسيطاً ، بأن نكتب الدالة اللزومية نفسها ،
ثم نضع القيم المختلفة أسفل عناصره التي يتكون منها بدون أن نكرر كتابة هذه
القيم وذلك على النحو الآتي : —

(ل د ل)	.	(ل د م)	:	د	:	(و د م)
ص ص ص	ص	ص ص		ص		ص
ص ص ص	ك	ك ك		ص		ك
ص ك ك	ك	ص ص		ص		ك
ص ك ك	ك	ص ك		ص		ك
ك ص ص	ص	ص ص		ص		ص
ك ص ص	ك	ك ك		ص		ص
ك ص ك	ص	ص ص		ص		ص
ك ص ك	ص	ص ك		ص		ص
١ ٤ ٢	٧	٥ ٣		٨		٦

(القائمة رقم ١٧)

استخدام قوائم المصدق في الكشف عن صحة الاستدلال :

بعد أن أوضحنا معنى قاعدة الصدق ، وكيفية تكوينها ، سنحاول توضيح كيفية الاستفادة منها في عملية الاستدلال . والواقع أننا يمكن أن نقيد من قوائم الصدق : —

١٧٠ :

في الكشف عن صفة عبارة إستدلالية معينة ، كما هو الحال في المثال السابق فلو

أردنا أن نكف عن صفة عبارة اللزوم السابقة :

(ص د ل) . (ل د م) : د : (ص د م) .

فإننا نكون قائمة الصدق الخاصة بها ، ثم نقرأ العمود الخاص بالدالة ، وهو العمود رقم ٨ في القوائم رقم ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، نقرأ قيم الصدق الواردة فيه ، فإن كانت جميعها « ص » أى صادقة ، كان معنى ذلك أن هذه الدالة اللزومية صادقة في جميع الحالات الممكنة التي تمثلها مجموعات الصدق المختلفة ، وعلى ذلك فهي صيغة صادقة ، ومن ثم تعبر عن إستدلال صحيح .

وبعبارة أخرى ، بما أن الصفة للميزة لأى عملية إستدلالية صحيحة هي كونها صادقة بالضرورة في جميع الحالات الممكنة ، وبما أن قائمة الصدق تذكر جميع الامكانات ، أى كل المجموعات الممكنة لقيم الصدق ، فإننا نقول بأن الإستدلال الصحيح ، هو الذى يكون صادقاً في قائمة الصدق في كل حالة من الحالات الممكنة . وبالتالي فإننا لن نجد في العمود الخاص بالعبارة الاستدلالية إلا الرمز « ص » الدال على الصدق . إذن يمكننا القول بأن قائمة الصدق من الممكن إستخدامها لاختبار صحة *testing for validity* المبسرات الاستدلالية المراد الكشف عن صحتها . ولنأخذ الأمثلة التالية لتوضيح ذلك : —

١ — لو كانت لدينا قاعدة الإثبات *modus Ponens* مثلاً ، وفرضنا أننا لا نعرف أنها عبارة لزومية صحيحة ، وأردنا أن نكشف عما إذا كانت تعبر عن إستدلال صحيح أم لا ، فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها ، وذلك كما يلي :

(ق د ل) . ق : د : ل

٥	٤	٣	٢	١
٥	٤	٣	٢	١
٥	٤	٣	٢	١
٥	٤	٣	٢	١
٥	٤	٣	٢	١
٥	٤	٣	٢	١

٥ ٤ ٣ ٢ ١
(٢،٤) (١،٣) (٢،١)

(القائمة رقم ١٨)

ويمكننا أن نلاحظ في هذه القاعدة ما يأتي :

(أ) إن قيم الصدق الواردة في العمود ٣ ، قد حصلنا عليها من القيم المقابلة لها في العمودين رقم ٢ ، ١ .

(ب) إن قيم الصدق الواردة في العمود ٤ ، حصلنا عليها من القيم للمقابلة لها في العمودين رقم ١ ، ٣ .

(ح) إن قيم الصدق الواردة في العمود ٥ ، حصلنا عليها من القيم الواردة في العمودين رقم ٢ ، ٤ .

(د) إن جميع قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٥ ، وهو الخامس بالعبارة الاستدلالية أو المراد الكشف عن صحتها ، لا نجد فيها إلا « ص » فقط . أي

أن العبارة صادقة في جميع الحالات الممكنة . إذن فهي تعبر عن امر — استدلال صحيح .

(هـ) إتنا قد كتبنا دالة اللزوم (ل د ل) أولا قبل كتابة الدالة العطفية « (ل د ل) . ل » ، وهذا هو الترتيب الصحيح في كتابة هذه القائمة . إذ أننا لو أهملنا الأقواس ، وكتبنا (ل . ل) أولا ، ثم أتبعنا ذلك بكتابة دالة اللزوم لوجدنا أنها قد أصبحت دالة مختلفة للزوم بين « ل » وبين « ل . ل » ، الأمر الذي ينتهي بنا إلى تكوين خاطئ لقائمة الصدق . ولذا فإن قائمة الصدق ما لم تبني خطوة خطوة ، فتبدأ من العناصر الداخلة في الأقواس ، إلى تلك الخارجة عنها ، فلن تكون النتيجة مضمونة الصحة .

٢ — لو كانت لدينا عبارة الاستدلال الفصلي التالية :

(ل ل ل) . ل . ل : ل

وأردنا أن نختبر صحة الاستدلال فيها ، فإننا نكتب قائمة الصدق الخاصة بها ، كما يلي :

ل	ل	ل ل ل	ل . ل	(ل ل ل) . ل . ل : ل
ل	ل	ل	ل	ل
ل	ل	ل	ل	ل
ل	ل	ل	ل	ل
ل	ل	ل	ل	ل

(القائمة رقم ١٩)

لاحظ ترتيب الأعمدة في هذه القائمة وقد وردت على نفس الترتيب الذي وردت به في العبارة الأصلية . ما الذي تفهمه من هذه القائمة ؟ هل هذه العبارة تدل على استدلال صحيح أم لا ؟

لو نظرنا إلى العمود الأخير الخاص بهذه العبارة ، فإننا لا نجد إلا « ص » فقط . إذن فهي عبارة صادقة في جميع الحالات الممكنة . إذن فالاستدلال الذي تعبر عنه استدلال صحيح .

٣ — متى إذن نعرف أن الاستدلال الذي تعبر عنه عبارة ما ، استدلال غير صحيح ؟ حينما نجد في العمود الخاص بالعبارة ، « ل » واحدة على الأقل . في هذه الحالة تكون العبارة كاذبة بالنسبة لحالة واحدة على الأقل من الحالات الممكنة . ومن ثم يكون الاستدلال الذي تعبر عنه غير صحيح . ولناخذ مثلاً لتلك العبارة التالية :

(ل د ل) ص : د : د : ل

وتكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتي :

ص	ل	ل د ل	ص	(ل د ل) ص : د : د : ل
ص	ص	ص	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك
ك	ك	ص	ص	ص

(القائمة رقم ٢)

يلاحظ أننا لم نستكمل كتابة القائمة ، فلم نذكر بقية قيم الصدق في الصف الرابع من العمود الأخير ، وذلك لأننا لا نحتاج إلى الاستمرار إلى ما هو أكثر من قيمة الصدق الثالثة في هذا العمود ، لأن « ك » في هذه الحالة توضح لنا إمكان وجود قيمة واحدة من قيم صدق الاستدلال في حالة كذب . وعلى ذلك فهذه العبارة ليست صادقة في جميع الحالات الممكنة ، بل كاذبة على الأقل في الحالة التي تكون فيها « ق » كاذبة ، « ل » « صادقة » . ومن ثم فهي لا تعبر عن استدلال صحيح .

ثانياً :

الاستدلال على صدق أو كذب دالة ما ، بناء على معرفة صدق أو كذب دالات أخرى مكافئة لها . وبعبارة أخرى فنحن نستخدم قوائم الصدق في الكشف عن الصدق والكذب بناء على الكشف عن التكافئات . ولتوضيح ذلك سنأخذ الأمثلة التالية :

(١) سبق أن ذكرنا في قائمة للتكافئات من قبل ، أن قضية اللزوم (ق د ل) تكافئ القضية المطفية التالية : - (ق . ل) ، والقضية الفصلية التالية : (- ق ل) . وبعبارة أخرى أن الدالة اللزومية : (ق د ل) يمكن تعريفها إما بواسطة النفي والعطف أو باستخدام النفي والفصل . وسنحاول الآن التعبير عن معنى هذا التكافؤ (لا بين قضيتين أو متغيرين قضوبين مثل ق ، ل ، بل بين دالتي صدق) باستخدام قوائم الصدق .

١ — ولنبدأ بتعريف اللزوم ، بالنفي والفصل وذلك كما يلي :

$$(ق د ل) \equiv (- ق ل)$$

ق	ل	رق	ق د ل	ق ٧ ل
ص	ص	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص
١	٢	٣	٤	٥
(٢ ، ١)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ١)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٣)

(القاعة رقم ٢١)

ما الذى تعنيه هذه القاعة ؟ لو قارنا بين قيم الصدق الواردة في العمودين ٤ ، ٥ ،
 لاحظنا أنها متناظرة بمعنى إتناو إخترا أى واحدة من قيم الصدق ، في أى من
 العمودين ، لوجدنا أن القيمة للوجوده معها في نفس الصف ، في العمود الآخر ،
 مناظرة لها . فلو كانت « ص » ، كانت القيمة المناظرة لها في العمود الآخر هي
 « ص » أيضاً ، وكذلك لو كانت « ك » لكانت القيمة المناظرة لها في العمود الآخر
 هي « ك » أيضاً . وما معنى هذا ؟

معناه أن الدالتين تشتركان في جميع حالات الصدق ، وجميع حالات الكذب ،
 فإذا كانت الواحدة صادقة ، كانت الأخرى صادقة ، وإذا كانت كاذبة كانت الأخرى
 كذلك . وهذا يعني أن صدق إحداها يستلزم صدق الأخرى ، وأن كذب إحداها
 يستلزم كذب الأخرى .

وقد عرفنا من قبل أن اللزوم للتبادل بين أى قضيتين يفيد معنى التماثل بينهما .

(م ١٥ - أسس المنطق الرمزي)

إذن فالدالتان (ه د ل) ، (ه و ل) متكافئتان . إذن فالصيغة :

$$(ه و ل) \equiv (ه د ل)$$

صيغة صحيحة .

٢ — كما سنقوم بالتعبير عن التكافؤ بين الزوم ، وبين النفي والعطف ، وذلك باستخدام قائمة الصدق التالية ، للتعبير .

$$(ه د ل) \equiv (ه و ل)$$

ه	ل	ه - ل	(ه د ل)	ه - (ه د ل)	(ه و ل)
ه	ه	ه	ه	ه	ه
ه	ك	ك	ك	ه	ه
ك	ه	ه	ه	ه	ك
ك	ك	ه	ه	ه	ك
١	٢	٣	٤	٥	٦

(القائمة رقم ٢٢)

فبمقارنة العمودين ٤ ، ٥ نلاحظ أن قيم الصدق فيهما متناظرة ، وهذا يعني وجود تكافؤ بين الدالتين « (ه د ل) » ، « (ه و ل) » . ويلاحظ في هذه الحالة أننا قد إتبعنا الخطوات التالية في تكوين القائمة : —

١ — نكتب أولاً من اليمين أسس الصدق ، وهي : ه ، ل .

٢ — ثم نكتب الدالات المستخدمة في التعبير الرمزي ، وهي على الترتيب :

« ل » ، « ه د ل » ، « ه و ل » .

٣ — ثم نضع قيم الصدى الخاصة بالأعمدة (٥) ، (٦) ، (٧-٨) ،
(٩-١٠) .

٤ — لكي نتوصل إلى معرفة قيم صدى « (١٠-١١) » ، نلاحظ أنها تنفي
« (١٠-١١) » ، ولذا فإننا نضع الدالة الجديدة (١٠-١١) ونكتب تحتها قيم
صددها بناء على معرفة قيم صدى (٥) ، (٦-٧) .

٥ — إذا عرفنا قيم صدى (٥-٦) ، عرفنا بالتالى قيم صدى « (١٠-١١) » ،
وذلك بأن نضع فى مقابل كل قيمة صدى فى العمود الخاص بـ (١٠-١١) ، نفي
هذه القيمة فى العمود الخاص بـ « (١٠-١١) » .

٦ — نقارن بين قيم الصدى فى العمودين رقم ٤ ، ٥ فنلاحظ أنها متافرة .
وعلى ذلك ننتهى إلى أن التعبيرين « (١٠-١١) » ، « (١٠-١١) » متكافئان .

∴ فالصيغة التالية صيغة صحيحة :

$$(١٠-١١) \equiv (١٠-١١) .$$

هذا ويمكن التعبير عن صحة هذه الصيغة بإدخالها على القائمة السابقة على النحو

الآتى :-

٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$
$\frac{(ص د ل)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$	$\frac{(ل - ص)}{(ل - ص)}$

(القائمة رقم ٢٣)

في هذه القائمة تبين أن جميع القيم الواردة في العمود رقم ٧ هي « ص » فقط . إذن فالتعبير الخاص بهذه القائمة صادق في جميع الحالات . ومن ثم فهو صحيح .

(ب) وبناء على ما سبق فإننا نستطيع معرفة أنواع التكافؤ بين دالات صدق أخرى بطريقة مماثلة . فدالة الصدق العطفية (ق . ل) ، يمكن تعريفها بواسطة النفي والزموم ، وعلى ذلك فإن : (ق . ل) تكون مكافئة لدالة « (ق د ل) » . أي أن :

$$(ق . ل) \equiv (ق د ل)$$

وتكتب قائمة الصدق الخاصة بذلك على النحو الآتي : —

ق	ل	ل - ل	(ق د- ل)	و د - ل
ا ا ا ا ا ك ك ك ك ك	ا ا ا ا ا ك ك ك ك ك	ا ا ا ا ا ك ك ك ك ك	ا ا ا ا ا ك ك ك ك ك	ا ا ا ا ا ك ك ك ك ك

(القائمة رقم ٢٤)

نلاحظ في هذه القائمة أن العمودين رقم ١ ، ٢ فيهما قيم صدق متناظرة ، وهذا يوضح أننا عرفنا بطريقة صحيحة ، دالة صدق بواسطة دالة صدق أخرى . (ونحن قد حصلنا على قيم الصدق الواردة في العمود رقم ٢ ، بواسطة نقي قيم الصدق الواردة في العمود ٣) .

٢ - لنفرض الآن أننا نريد الاستدلال على تكافؤ الدالتين : (ق . ل) ،
(ق د ل) بعد أن زعمنا أنهما كذلك . لذا نكتب قائمة الصدق الخاصة بهما
كما يلي :-

ق	ل	ق . ل	ق د ل
ق	ل	ق . ل	ق د ل

(القاعة رقم ٢٥)

هنا نلاحظ عدم تكافؤ الدالتين ، لأنه على الرغم من تناظر قيم الصدق في بعض الحالات الواردة في العمودين ١ ، ٢ . إلا أن الصنفين الثالث والرابع يوضحان الاختلاف بين قيم صدق التعبيرين . وهما لكي يكونا متكافئين يجب أن يتضمنا قيم صدق متماثلة في كل صف من صفوف القائمة .

هكذا نكون قد استخدمنا قائمة الصدق للبرهنة على عدم تكافؤ دالات الصدق ، كما استخدمناها من قبل للبرهنة على تكافؤ دالات الصدق . وسواء كنا نستخدمها لاثبات التكافؤ أو عدم التكافؤ بين دالات الصدق ، فنحن إنما نستخدمها للاستدلال على صدق دالة ما أو كذبها بناء على معرفة تكافؤها مع دالة صدق أخرى .

(ج) كما يمكننا البرهنة على تكافؤ دالة الفصل الضعيف (ق ٧ ل) ، ودالة صدق عطفية مثل « (- ق - ل) » وهذا ما يتضح من قائمة الصدق التالية : —

ق	ل	- ق -	ل -	- ق - ل	- (ق - ل)	ق ٧ ل
ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ص	ص	ص
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك
					١	٢

(القائمة رقم ٢٦)

نلاحظ في هذه القائمة أن القيم الواردة في العمودين رقم ١ ، ٢ واحدة ، وهذه يدل على تكافؤ الدالتين للذ كورتين .

(د) وبمكتنا البرهنة على تكافؤ دالة الفصل القوى ($\bar{v} \cup$) ، والدالة

المعطية للنفي التالية : $\neg (\neg \cup \neg \cup) \cdot (\neg \cup) \cdot \text{أى أن} : -$

$$\cdot \neg (\neg \cup \neg \cup) \cdot (\neg \cup \neg \cup) \equiv (\bar{v} \cup)$$

وهذا ما يتضح من القائمة التالية : —

$\bar{v} \cup$	$\neg (\neg \cup \neg \cup) \cdot (\neg \cup)$	$(\neg \cup)$	$\neg \cup$	$\neg (\neg \cup)$	$\neg \cup$	$\neg \cup$	$\neg \cup$	$\neg \cup$	$\neg \cup$
ك	ك	ك	ص	ص	ك	ك	ك	ص	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ص	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص	ص	ك	ك

٨

٧

٦

٥

٤

٣

٢

١

(٦ ، ٤)

(٢ ، ١)

(القائمة رقم ٢٧)

ونلاحظ في هذه القائمة أن قيم الصدق الخاصة بإجراء العطف الكبير في العمود

رقم ٧ ، هي نفسها القيم الواردة في العمود رقم ٨ . وهذا يعني تكافؤ دالتى الصدق للمعنيين .

(هـ) كما يمكن البرهنة على تكافؤ دالة صدق التكافؤ للمادى ، ودالة صدق

تقوم على النفي والعطف . أى أن نبرهن على صحة العبارة التالية : —

$$(\bar{v} \equiv \cup) :: (\neg \cup \neg \cup) :: (\neg \cup \neg \cup)$$

وتقرأ : إن القول بأن و تكافئ ل ، يكافئ القول : بأنه من الكذب أن تكون « و » صادقة ، « ل » كاذبة معاً ، وأنه من الكذب أن تكون « ل » صادقة ، « و » كاذبة معاً . ويمكن البرهنة على ذلك باستخدام قائمة الصدق التالية :-

ق	ل	و -	ل -	و - ل	ل - و	و - ل	ل - و	و - ل	ل - و
ق	ل	و -	ل -	و - ل	ل - و	و - ل	ل - و	و - ل	ل - و
م	م	ك	ك	م	ك	م	ك	م	ك
م	ك	ك	م	م	م	ك	ك	م	م
ك	م	م	م	م	ك	م	م	ك	ك
ك	ك	م	ك	م	م	ك	ك	م	م
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

(القائمة رقم ٢٨)

فبمقارنة العمودين ٩ ، ١٠ نلاحظ أن قيم الصدق فيهما متناظرة على مستوى جميع الصفوف . إذن فالتعبيران الواردان في العمودين ٩ ، ١٠ تعبران متكافئان .

هذا ويمكننا بالإضافة إلى كل الأمثلة السابقة ، البرهنة باستخدام قوائم الصدق على تكافؤ دالة الفصل الضعيف ، مع الدالة القائمة على اللزوم والنفي ، وتكافؤ دالة الفصل القوي مع الدالة القائمة على اللزوم والنفي ، وتكافؤ الدالة العطفية مع الدالة القائمة على الفصل والنفي ، وتكافؤ دالة التكافؤ للادى ، مع الدالة القائمة على الفصل القوي وغير ذلك .

بالتأ :

الكشف عن أنواع الدالات المختلفة ، مثل تلك التي تحتل الصدق والكذب ،
أى الدالات للممكنة contingent أو تلك التي تكون صادقة دائماً ، أى الدالات
المعبرة عن تحصيل الحاصل tautologous ، أو تلك التي تكون كاذبة دائماً ، أى
الدالات للمعبرة عن تناقض ذاتى Self - contradictory . ولتوضيح ذلك نقول :
لو كانت لدينا دالة الصدق (ر . ل) مثلاً ، فإننا لا نعرف مسبقاً أو بشكل قبلى
أو أولى ، ما إذا كان هذا التعبير صادقاً أو كاذباً . بل سنعرف صدقه أو كذبه بناء
على معرفة قيم الصدق الخاصة بالتغيرات « ر » ، « ل » الواردة فى الدالة . وبعبارة
أخرى فإن قيمة صدق التعبير المعطى ستكون متوقفة على قيم القضايا للفردة ، أو
ستكون ممكنة بناء على قيم صدق هذه القضايا . وبتطبيق مثل هذا التحليل بالنسبة
لدالات الصدق ، وبمناقشة قوائم الصدق الخاصة بها ، يمكننا أن نرى أن مثل هذه
الدالات دالات ممكنة ، بمعنى أن نعرف قيم صدقها معرفة بعدية ، وتكون مرهونة
بقيم صدق التغيرات الواردة فى هذه الدالات .

أما التعبيرات ، أو الدالات التي نعرف صدقها أو كذبها قبلياً أو أولياً
Apriori (١) فهي إما أن تكون تعبيرات دالة على تحصيل الحاصل ، أو دالة على
التناقض الذاتي .

(أ) الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل :

وهى الدالات التي تكون صادقة صدقاً أولياً ، أو صادقة صدقاً غير مشروط
(إذ ليس لتحصيل الحاصل شروط — صدق ، لأنه صادق صدقاً غير مشروط) (٢) .

-
- (١) والأولية هنا لا تحمل أى معنى فلسفى أو ميتافيزيقى ، بل تعنى أننا ندرك
من الدالة نفسها ما إذا كانت صادقة أو كاذبة بالضرورة .
(٢) لدفيج فتجشتين : رسالة منطقية فلسفية . (الترجمة العربية) — عبارة
رقم ٤٦١ ر ، صفحة ١٠٥ .

ولنأخذ التعبير التالي البسيط الذى يعبر عن تحصيل الحاصل :

$$٧ - ٧$$

فإذا ما كونا قائمة الصدق الخاصة به على النحو الآتى :—

ق	ق - ٧	ق - ٧
ص	ك	ص
ك	ص	ص

(القائمة رقم ٢٩)

فإننا نلاحظ أنه مهما كانت قيمة « ٧ » هي الصدق أو الكذب ، فإن قيمة صدق الدالة (٧ - ٧) تكون هي الصدق فقط دائماً . وبما أن « ٧ » متغير يدل على أية قضية ولا يدل على قضية معينة بالذات ، فإننا نستنتج أن عبارة الفصل أو الدالة الفصلية التى تجمع بين أية قضية (مثل ٧) وتقيضها (- ٧) تكون عبارة صادقة بالضرورة ، أو هى معبرة عن تحصيل الحاصل ، بغض النظر عما تشير إليه « ٧ » .

وبعبارة أخرى — لو إستخدمنا تحليل قائمة الصدق السابقة — نقول أن العمود

الخاص بمثل هذه الدالات ، لن يحتوى إلا على قيم صادقة (ص) فقط بدون أن
زد فيه (ك) واحدة أو قيمة واحدة تدل على الكذب .

ومن الممكن توضيح ذلك بأمثلة أكثر تركيياً من مثلنا السابق ، سبق ذكرها
من قبل (مثل القوائم رقم ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ وكذا القائمة ١٩ وغيرها) .

جميع الدالات للمائة الدالات التالية : —

$$١ - (\text{ص} \supset \text{ل}) \cdot (\text{ل} \supset \text{م}) : \text{ص} : (\text{ص} \supset \text{م})$$

(قوائم ١٥ ، ١٦ ، ١٧)

$$٢ - (\text{ص} \supset \text{ل}) \cdot \text{ص} : \text{ص} : \text{ل} \quad (\text{قائمة رقم ١٨})$$

$$٣ - (\text{ل} \supset \text{ص}) \cdot \text{ص} : \text{ص} : \text{ل} \quad (\text{قائمة رقم ١٩})$$

هي دالات صادقة دائماً ، ومن ثم فهي معبرة عن تحصيل الحاصل . وسنأخذ
للمثال التالي لبيان كيفية تكوين قائمة صدق الإخراج البنائي التالي :

$$(\text{ص} \supset \text{ل}) \cdot (\text{م} \supset \text{ن}) \cdot (\text{ص} \supset \text{م}) : \text{ص} : \text{ل} \supset \text{ن}$$

لتوضيح معنى تحصيل الحاصل ، وذلك على النحو الآتي : — (١)

$$(\dot{\gamma}_r) : \mathcal{C} : (\gamma_s) \cdot [(\dot{\gamma}_r) \cdot (\gamma_s)]$$

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤																																																																																						

كما يمكن التعبير عن هذه القائمة بشكل مبسط على النحو الآتي : —

(٥ د ل) . (م د ن) . (٧٧ م) : د : (ل ٧ ن)

م	م	م	م	م	م	م	م	م	م
م	م	م	ك	ك	ك	م	ك	م	م
م	م	م	ك	م	م	م	ك	م	م
م	م	م	ك	م	ك	م	م	م	م
م	م	م	ك	م	م	م	ك	ك	ك
م	ك	ك	ك	م	ك	ك	ك	ك	ك
م	م	م	ك	م	م	ك	ك	ك	ك
م	ك	ك	ك	م	ك	ك	ك	ك	ك
ك	م	م	م	م	م	م	م	م	م
ك	م	م	ك	ك	ك	م	ك	ك	ك
ك	م	م	ك	م	م	ك	ك	م	م
ك	م	م	ك	م	م	م	م	م	م
ك	م	م	ك	ك	ك	م	ك	ك	ك
ك	م	م	ك	ك	ك	م	ك	ك	ك
١	٢	٧	٣	٦	٤	٩	٨	١١	١٠

نلاحظ في هذه القائمة ، وكذا القائمة السابقة أن العمود رقم ١١ ، وهو الخاص بدالة الإخراج ، لا يحتوى إلا على قيم صدق كلها صادقة في جميع الصفوف . ومن ثم فإن الدالة في هذه الحالة تكون معبرة عن تحصيل الحاصل .

والواقع أننا نستطيع أن نضيف إلى ذلك القول بأن مثل هذه الدالات للمعبرة عن تحصيل الحاصل ، إنما تعبر عن صحة الاستدلال ، طالما أن الاستدلال الصحيح هو الذى تلزم نتيجته بالضرورة عن مقدماته في جميع الأحوال (١) .

(ب) الدالات للمعبرة عن التناقض الدائى :

إذا عرفنا أن الدالة للمعبرة عن تحصيل الحاصل تنفى الدالة المعبرة عن التناقض ، والعكس صحيح ، لعرفنا أن دالة التناقض تكون كاذبة دائماً ، وفي جميع الحالات طالما كانت دالة تحصيل الحاصل صادقة دائماً وفي جميع الحالات . ولذا لو أننا قمنا دالة تعبر عن تحصيل الحاصل مثل : (٧٧ - ٧) ، لحصلنا على دالة التناقض التالية :

١ — - (٧٧ - ٧)

التي تقرأ : إنه من الكذب أن تقول أن القضية ٧ ، إما أن تكون صادقة أو تكون كاذبة . والى يمكن أن نكتب قائمة الصدق الخاصة بها على النحو الآتى :

(١) والواقع أن الدالات للمعبرة عن تحصيل الحاصل ، كثيرة ومتعددة طالما أنها تعبر عن الصيغ الصحيحة دائماً وفي جميع الحالات . ومن شاء الاستزادة في هذا الصدد يمكنه الرجوع إلى كتاب كارناب :

ق	ق - ق	ق - ق	ق - ق (ق - ق)
ص	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ك

(القائمة رقم ٣٢)

في هذه القائمة نلاحظ أن العمود رقم (١) ترد فيه القيم الدالة على تحصيل الحاصل ، كما نلاحظ أن العمود رقم (٢) ترد فيه القيم النافية لقيم تحصيل الحاصل ، أو للمقابلة لها ، وتمثل الكذب في جميع الحالات ، أى للتناقض الدانى .

٢ — ولتأخذ المثال التالى الذى يوضح العلاقة بين التناقض وبين تحصيل الحاصل ، وسوف نرى في قائمة الصدق التالية أننا لو نفينا الدالة الخاصة بقاعدة الرفع ، فسنحصل على دالة كاذبة في جميع قيمها ، وبالتالى تكون متناقضة ، وهى :

$$- [(\text{د} \text{ د } \text{ل}) \text{ ل } : \text{ل} : \text{د} : \text{د}]$$

Carnap, R : Introduction to Symbolic and its Applications,
pp. 26 - 27

الذى أورد قائمة مطولة للتعبيرات الخاصة بتحصيل الحاصل ، وكذا رايشباخ في كتابه سالف الذكر « عناصر المنطق الرمضى » (صفحة ٣٨ — ٣٩) الذى أورد عدداً كبيراً من الدالات المعبرة عن تحصيل الحاصل بلغت ٤٦ دالة صدق .

ق	ل	- ل	ق دل	(ق دل) - ل	(ق دل) . ل : د :- ق	- [(ق دل)
م م م م	ك ك م م م	ك ك م م م	م م م م	ك ك م م م	م م م م	م م م م

(القائمة رقم ٢٣)

في هذه القائمة نجد أن قيم الصدف الواردة في العمود رقم ٥ تمثل تحصيل الحاصل ،
والقيم الواردة في العمود رقم ٦ تمثل قيم تحصيل الحاصل بعد تقضها ، فأصبحت تمثل
معنى التناقض .

الآن أصبح في إمكاننا ، لو وجدنا دالة صدق ما ، أن نكشف عما إذا كانت صادقة دائماً (أى معبرة عن تحصيل الحاصل) أو كاذبة دائماً (أى معبرة عن تناقض) ، أو مما يمكن أن يصدق أو يكذب (أى ممكنة الصدق) ، وذلك باستخدام قوائم الصدق . وأن نكشف بالتالى — لو كانت هذه الدالات معبرة عن استدلال — عما إذا كان الاستدلال صحيحا (فى حالة الصدق الدائم فى جميع الحالات) ، أو كان غير صحيح (لتناقض الدالة أو لإمكان كذبها ولو فى حالة واحدة) . ولنأخذ لنا كيد هذا المعنى وزيادة إيضاحه الأمثلة التالية : —

١ — لو كانت لدينا الدالة الآتية : —

$$(١) (ل - د - و) \equiv (ل د و)$$

فإننا نكتين من قائمة الصدق الخاصة بها بطريقة مباشرة أنها تعبر عن تحصيل
الحاصل ، ومن ثم عن إستدلال صحيح طالما أن العود الخاص بها في القائمة لا
يحتوى من بين قيم صدقه على قيمة واحدة كاذبة ، وذلك كما يلي :—

ق	ل	ق -	ل -	ق د ل	ل - د - و	$\equiv (ق د ل) (ل - د - و)$
ص	ص	ك	ك	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص

(القائمة رقم ٣٤)

٢ — لو كانت لدينا الدالة :

$$(٢) (ل - و - د) \equiv (ل - و)$$

وأردنا أن نعرف ما إذا كانت معبرة عن إستدلال صحيح أم لا ، أن نكتب
قائمة الصدق الخاصة بها كما يلي :—

(١) وتمثل هذه الصيغة ما أسميناه من قبل بقانون عكس النقيض أو التناقل

transposition.

(٢) وتمثل هذه الصيغة القانون الأول من قانونى دي مورجن السابق ذكرهما .

(م ١٦ — أسس المنطق الرمزى)

ق	ل	ق -	ل -	ق - ل	ل - (ق - ل)	ق - ل - (ق - ل)
م	م	ك	ك	م	ك	م
م	ك	ك	م	ك	م	م
ك	م	م	ك	ك	م	م
ك	ك	م	م	ك	م	م

(القائمة رقم ٣٥)

في القائمة السابقة نلاحظ أن جميع القيم الواردة في العمود الخاص بالدالة هي « م » فقط ، ومن ثم فهي تعبر عن تحصيل حاصل ، ومن ثم عن إحتلال صحيح .

٣ - لو كانت لدينا الدالة :-

$$ل - (ل - ل) \equiv (ل - ل) (١)$$

وأردنا أن نبين مدى صحة الاستدلال فيها ، لكتبنا قائمة صدقها على النحو الآتي :-

(١) وتمثل هذه الصيغة القانون الثاني من قانوني دي مورجن سالفى الذكر .

ق	ل	ق -	ل -	ق - ل	ق ل	ق ل - (ق ل)	ق ل - (ق ل)
م	م	ك	ك	ك	م	ك	م
م	ك	ك	م	ك	م	ك	م
ك	م	م	ك	م	ك	م	م
ك	ك	م	م	م	ك	م	م

(القائمة رقم ٣٦)

ولتبيننا في هذه القائمة أن جميع القيم الواردة في العمود الخاص بالدالة لا تحتوى إلا على « ص » فقط ، ومن ثم فهي تعبر عن تحصيل الحاصل ، وبالتالي عن إستدلال صحيح .

٤ — لو كانت لدينا الدالة :

$$(u, v) : (u, w) : (v, w)$$

وأردنا أن نتبين مدى صحة الاستدلال الذي تعبر عنه ، فإننا نكتب قائمة صدورها
كما يلي : —

(القائمة رقم ٣٨)

الطريقة المعدلة لقائمة الصدق الخاصة بالمدالة الزمنية :

لو كان لدينا الاستدلال التالي : (إذا انخفضت درجة الحرارة إلى ما دون الصفر ، تجمدت المياه . وقد انخفضت درجة الحرارة إلى ما دون الصفر . إذن فقد

تجمدت المياه) ، وأردنا أن تثبت من صحته ، فإننا نشير إليه بالصيغة الرمزية التالية : —

(ل د ل) . ل : د : ل

ثم نعبّر عن هذه الدالة بقائمة الصدق التالية : —

ل	د	ل د ل	(ل د ل) . ل	(ل د ل) . ل : د : ل
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ص	ص	ص	ك	ص
ك	ك	ص	ك	ص

(القائمة رقم ٣٩)

كما نستطيع تطبيق الطريقة المبسطة في استخدام القوائم لكي نعبّر عن الاستدلال على النحو الآتي : —

(ل د ل) . ل : د : ل

ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص
ك	ص	ك	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥

(القائمة رقم ٤٠)

وبما أن جميع القيم الواردة في العمود رقم ٥ ، هي « ص » ، فإن ذلك يزودنا بصدق الدالة ، ومن ثم فإن الاستدلال الذي تعبر عنه استدلال صحيح .

إلا أننا نستطيع — بشكل أكثر تبسيطاً — ولكي نستفيد فائدة أكبر من استخدام المقدمات والنتائج ، في الدالة اللزومية السابقة ، أن نضع استدلالنا على النحو الآتي :-

(١)	(٢)	(٣)
ص د ل	ص	ل
ص	ص	ص
ك	ص	ك
ص	ك	ص
ص	ك	ك

(القائمة رقم ٤١)

في هذه القائمة نلاحظ أن الأعمدة الثلاثة ١ ، ٢ ، ٣ تناظر الأعمدة ٣ ، ١ ، ٢ على الترتيب في القائمتين السابقتين .

لكن كيف نعرف من هذه القائمة الجديدة ما إذا كان الاستدلال موضوع الحديث صحيحاً أو غير صحيح ؟ نلاحظ أننا بشيء من التعديل الطفيف في طريقة استخدام قائمة الصدق ، قد وضعنا الدالات الثلاث التي يتكون منها الاستدلال ، على شكل مقدمتين ونتيجة . وقد وضعنا الرقمين ١ ، ٢ فوق العمودين الأولين لكي نوضح أنهما المقدمتان (على خلاف ترتيبهما في القائمتين السابقتين) ، ووضعنا الرقم ٣ فوق العمود الأخير لكي يعبر عن النتيجة .

الآن ، بناء على ما نعرفه عن العلاقة بين المقدمات والنتيجة في الاستدلال الصحيح ، نبدأ في ملاحظة الصفوف الأتية بحثاً عن الحالات التي تكون فيها المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة .

فإذا كانت جميع الحالات التي تكون فيها للمقدمتان صادقتين — في القائمة — ذات نتيجة صادقة ، كان الاستدلال صحيحاً . أما لو صادفنا حالة واحدة فقط ، تكون فيها المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة ، كانت القائمة معبرة عن استدلال غير صحيح .

في مثالنا السابق ، نجد في الصف الأول من القائمة أن كلا من المقدمتين والنتيجة صادقة ، وبما أنه لا توجد حالة واحدة تكون المقدمتان فيها صادقتين والنتيجة كاذبة ، فإن هذا يعني أن النتيجة الموجودة في الاستدلال صادقة ، وأن الاستدلال صحيح .

ولنأخذ مثلاً آخر لتأكيد هذا المعنى : لو كان لدينا الاستدلال التالي : (إذا أضاء النور باللون الأحمر ، وجب عليك أن تتوقف عن السير . وأنت قد توقفت ، إذن فالنور قد أضاء باللون الأحمر) . وأردنا أن نتثبت من صحته ، فإننا نعبر عنه بالصيغة الرمزية التالية :

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r)$$

ثم نعبر عن هذه الدالة بقائمة الصدق الكاملة التالية : —

ق	ل	ق د ل	(ق د ل) . ل	(ق د ل) : د : ق
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ص	ك	ص
١	٢	٣	٤	٥
			(٢، ٣)	(١، ٤)

(القائمة رقم ٤٢)

أو بهذه القائمة المبسطة .

(ق د ل) . ل : د : ق

ص	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ص	ك
ك	ص	ك	ك	ص
١	٣	٢	٤	٥

(القائمة رقم ٤٣)

ونحن نلاحظ في هاتين القائمتين أن العمود رقم ٥ يحتوى على ل ومعنى هذا أن الدالة لا تعبر عن تحصيل الحاصل ، بل هي ممسكة الصديق فقط ومن ثم فالاستدلال لا يكون صحيحاً .

كما يمكن التعبير كذلك عن هذه الدالة نفسها بالقائمة الأكثر تبسيطاً وإيجازاً،
والتي يمكن كتابتها على النحو الآتي :—

	(٢)	(١)	
	ل	ل	و
✓	<u>ص</u>	<u>ص</u>	<u>ص</u>
	ص	ك	ك
×	<u>ك</u>	<u>ص</u>	<u>ص</u>
	ك	ك	ص

(القائمة رقم ٤٤)

وهي القائمة التي نضع فيها الاستدلال في صورة مقدمتين ونتيجة . فإذا ما بحثنا
في القائمة عن المقدمتين الصحيحتين والنتيجة الصحيحة ، لوجدنا ذلك متحققاً في الصف
الأول . لذا قد نميل في هذه الحالة إلى اعتبار الاستدلال على أنه صحيح ، لكننا
نكون قد تسرعنا في هذا الحكم بصحة الاستدلال لأننا نلاحظ في الصف الثالث بعد
ذلك وجود مقدمتين صادقتين ونتيجة كاذبة . وهذه الحالة وحدها كفيلة بأن تجعل
الاستدلال غير صحيح .

قائمة الصدق للزدوجة :

وأخيراً فنحن نستطيع أن نذكر طريقتين مختلفتين معاً من طرق استخدام قوائم

الصدق ، وذلك في قائمة واحدة لنسبها بالقائمة للزوجة ، ولناخذ لتوضيح ذلك قاعدة الرفع التالية :—

$$(٢ \text{ د ل}) \cdot \text{ل} : \text{د} : \text{ل} - \text{و}$$

(٢ د ل) : ل : د : ل - و		و د ل ل - و			ل	و
ك	ص	ص	ك	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ص	ك
ص	ص	ص	ص	ص	ك	ك
$\uparrow(٢)$		$\rightarrow(١)$				

(القائمة رقم ٤٥)

ويشير السهم رقم ١ في هذه القائمة إلى الصف الوحيد الذي نجد فيه مقدمتين صادقتين ونتيجة صادقة . وبما أنه لا وجود هنا لأي صف يحتوي على مقدمتين صادقتين ونتيجة كاذبة ، فإن الاستدلال يكون صحيحاً . أما السهم رقم ٢ فيوضح أن جميع القيم الخاصة بالدالة كلها ، هي قيم صادقة . وهكذا يتضح لنا أن صورة الاستدلال تعبر عن تمثيل الحاصل ، وأنه استدلال صحيح منطقياً كذلك .

زاجاً :

الكشف عن الاتساق Consistency في التعبيرات أو الدالات ، بفرض التوصل

إلى معرفة الاستدلالات الصحيحة . ويقصد من كلمة « اتساق » في للنطق الاتساق الذاتي Self - consistency أو عدم التناقض non - contradictoriness ، ومن ثم التعبير عن إمكان الصدق . ومن الواضح أننا نستطيع استخدام طريقة قائمة الصدق في تحديد الاتساق . فالتساق ، أو إمكان صدق تعبير ما ، يبرهن عليه إذا وردت « ص » واحدة على الأقل في العمود الأخير من قائمة الصدق الخاصة به ، كما يبرهن على إتساقه إذا كان للعمود الأخير من دالة الصدق لا يحتوى إلا على « ك » فقط . ولنأخذ لذلك مثلاً قائمة الصدق التالية : —

ص	ص -	ص - (ص)	ص - (ص)	ص -
ص	ك	ص	ك	ك
ك	ص	ص	ك	ك
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	

(القائمة رقم ٤٥)

في هذه القائمة نلاحظ : —

١ — أن الدالة رقم (١) ، أي (ص -) ولو أنها تعبر عن قول غير صحيح invalid ، لكنه متسق Consistent ، طالما أنها تعبر عن إمكان الصدق (إذ أنه إما صادق أو كاذب) .

٢ — إن الدالة رقم (٢) تعبر عن قول صحيح valid ، ومتسق في الوقت نفسه ، لأنها لا تعبر فقط عن إمكان الصدق ، بل كذلك عن ضرورته .

٣ — الدالة رقم (٣) تعبر عن قول غير صحيح ، وغير منسق أيضاً .

٤ — الدالة رقم (٤) تعبر عن قول غير صحيح ، وغير منسق أيضاً .

الاتساق والاستدلال :

الواقع إن إختبار الاتساق والكشف عنه ، له أهمية كبيرة بالنسبة لمعرفةنا بمقدمات ونتائج الاستدلال . فإذا كانت مجموعة من المقدمات ، تنتهى بنا — بواسطة برهان صحيح — إلى نتيجة غير متسقة ، أى نتيجة غير ممكنة الصدق فى أى حالة من حالات مجموعات الصدق ، أى نتيجة كاذبة بالضرورة ، فإننا نكون على يقين من كذب إحدى المقدمات على الأقل . طالما أن الاستدلال الصحيح — كما سبق أن ذكرنا — هو الذى يحتوى على مقدمات صادقة ، تلتج عنها بالضرورة نتيجة صادقة . وهذا ما يتضح من المثال التالى :

٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ك	ك	ك
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ك	ك	ك
ص	ص	ص	ص	ص	ص	ص
ك	ك	ك	ك	ك	ك	ك

(القائمة رقم ٤٦)

وبعبارة أخرى فإن أية مقدمة مثل « ص » ، إذا كانت تستلزم للنتيجة غير

المتسقة (ل . ل) فسوف يلزم عنها دائماً أن تكون « و » ، أى المقدمة نفسها ، كاذبة .

هذا من جهة ، ومن جهة أخرى ، فيما يتعلق بالمقدمات غير المتسقة ، فإننا نعرف أن نتيجة الاستدلال الصحيح ، لا تكون صادقة إذا كانت المقدمات غير صادقة . وعلى ذلك يمكن رفض أى استدلال لأول وهلة على أنه غير صحيح ، إذا كانت مقدماته غير متسقة . وتوضح قائمة الصدق التالية وبرهن على أن أى زوج من القضايا فى حالة تناقض ، إذا ما وضع فى أية مجموعة من القضايا ، فإنه يحيل هذه المجموعة كلها إلى مجموعة غير متسقة : —

و	ل	ق . ل . ق
ص	ص	ك
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

(القائمة رقم ٤٧)

قائمة الصدق الموجزة الخاصة بالكشف عن الاتساق :

إن طريقة استخدام قائمة الصدق الكاملة ، كما رأينا ، وإن كانت سهلة الاجراء ، بل وتكاد تكون آلية فى كيفية تحديد صحة أو إتساق أى تعبير أو دالة فى منطق القضايا . إلا أن تطبيقها مع ذلك يتطلب وقتاً طويلاً . ولذا فإننا نستطيع استخدام طريقة أكثر إختصاراً ولا تتطلب منا أكثر من إختيار أهم ما تفيد به قائمة الصدق

(القائمة رقم ٤٨)

الواقع إن قراءة هذه القائمة بإمعان ، يكشف لنا عن عدم صحة الاستدلال الذي تعبر عنه الدالة ، لأن واحدة من مجموعات قيم الصدق الممكنة ، وهي التي تكون فيها « و » ، « ل » ، « كاذبتين معاً » ، تتوصل منها إلى لزوم كاذب (في الصف الرابع) بين المقدمات والنتيجة .

وبعبارة أخرى ، لو كانت **« ل »** كاذبتين معاً ، فإن علينا أن نصف نفى عطفهما ،
 أى « - (ل . ل) » بأنه صادق في حين أن النتيجة وهى « ل » كاذبة . وبما
 أن القضية الصادقة لا تستلزم قضية كاذبة ، فإن المقدمتين في هذه الحالة ،
 لا تستلزمان النتيجة . ولذا فلا استدلال يمكن أن يكون كاذباً ، ومن ثم فهو
 غير صحيح .

الآن ، نلاحظ أنه إذا لم يكن لنا هدف من تكوين القائمة السابقة إلا مجرد الكشف عن عدم الصحة أو الكذب للمكن بالنسبة للاستدلال موضوع الحديث ، فما لا شك فيه أن هناك جزءاً كبيراً من العمل والجهد الذى قننا به ، زائد عن الحاجة ، ومن ثم يمكن توفير الجهد والوقت الذى بذل فيه . فلم يكن من الضروري أن نعرف أن المقدمتين تستلزمان النتيجة بالفعل فى ثلاث من الحالات الأربع للممكنة ، إذ أن المجموعة الرابعة فقط من مجموعات قيم الصدق هى التى تهمننا فقط . ولذا فهى التى يجب أن تقتصر فيها على المقدمة .

ولكن كيف نحدد هذه الحالة وحدها دون الحالات الأخرى للممكنة ؟ هل هناك طريقة إذن ، لى نحدد بها مباشرة مجموعة قيم الصدق التى تجعل الاستدلال غير الصحيح كاذباً ، بدون أن ناعبأ إلى كل المجموعات الممكنة ؟ من الممكن أن نقوم بذلك لو استخدمنا الطريقة التالية : — أن نقول أن الإمكان الوحيد للحصول على « ل » فى العمود الأخير الخاص بقائمة صدق استدلال غير صحيح ، يحدث حينما يكون العمود الخاص بالمقدمتين (رقم ٦ فى القائمة السابقة) محتوياً على « ص » ويكون عمود النتيجة (رقم ٢ فى القائمة ذاتها) محتوياً على « ل » .

وعلى ذلك ، فإننا لى نختبر صحة استدلال ما :

١ — نفترض كذب نتيجته .

٢ — ثم إذا استطعنا بطريقة أو بأخرى أن نجعل المقدمتين صادقتين .

٣ — فإننا نكون قد برهنا على أن الاستدلال غير صحيح . لأن هذه الحالة ، حالة صدق اللدمات وكذب النتيجة ، سوف تكون هى الحالة الوحيدة التى يكون الاستدلال فيها كاذباً .

ولنحاول أن نتبين ذلك — بتال الاستدلال غير الصحيح الذى إستخدمناه
من قبل ، وذلك بإتباع الخطوات التالية :—

١ — نكتب التعبير الرمزى للاستدلال كما يلى :—

— (ل . ص) . ص ~ : د : ل

٢ — نكتب الحرف « ل » تحت النتيجة ، لكى نوضح أننا نفترض أنها
كاذبة ، وذلك كما يلى :

— (ل . ص) . ص ~ : د : ل

ل

٣ — الآن ، إذا كانت ل كاذبة فى النتيجة ، فلا بد وأن تكون كذلك فى
للقدمتين ، ومن ثم فإننا نستطيع أن ننسب « ل » إلى اللقدمتين ، فنضها فيهما
بدلا من ل ، وكذا فى النتيجة كما يلى :—

— (ل . ص) . ل ~ : د : ل

٤ — وبما أن الاختبار الذى نزمع القيام به ، يقوم على تكذيب النتيجة ، ومن
ثم محاولة جعل المقدمات صادقة ، فإن الخطوة التى تسلو ذلك هى أن نفترض صدق
للقدمة الثانية ، وهى (ص ~) ، طالما أن اللقدمتين معطوفتان ، وطالما أن قضية
العطف لا تكون صادقة إلا إذا كانت كل قضية معطوفة فيها صادقة . ولذا
فإننا نكتب :—

— (ل . ص) . ص ~ : د : ل

٥ — الآن إذا كانت « ص ~ » صادقة (فرضاً) ، كانت « ص » كاذبة ،
ولذا فإننا نكتب :—

(م ١٧ — أسس المنطق الرمزى)

- (ك.ك) . ص : د : ك

٦ — وبما إن القضية العطفية التي تتكون من قضايا معطوفة كاذبة ، تكون هي نفسها كاذبة ، فإننا نحصل على :-

- (ك) . ص : د : ك

٧ — وبما أن نقي القضية الكاذبة ، صادق ، إذن :

ص . ص : د : ك

٨ — لكن عطف أى قضيتين صادقتين ، يكون هو نفسه صادقاً ، وعلى ذلك فإننا نحصل على :-

ص د ك

٩ — وهكذا نكون قد نجحنا في جعل المقدمتين صادقتين مع إنتراض كذب النتيجة ، أو بناء على هذا الافتراض - وبما أن القضية الصادقة لا تستلزم قضية كاذبة ، فإننا نكون ببساطة أمام مجرد كذب ، هو :

ك

وهذه على وجه الدقة هي « ك » التي ظهرت في (الصف الرابع من العمود رقم ٧) من قاعة الصدق الكاملة رقم ٤٨ ، على أنها نتيجة لإمكان قيمة صدق قضيتين كاذبتين معاً . هكذا نكون قد وصلنا إلى هذه الحالة من الكذب مباشرة باستخدام للبدا القائل بأن الاستدلال غير الصحيح هو فقط ذلك الذي يمكن أن يحتوي على مقدمات صادقة ونتيجة كاذبة .

ومن الطبيعي أن تكون الخطوات الخاصة بتطبيق قاعة الصدق للوجزة ، هي

نفسها أكثر تركيزاً وإيجازاً مما هي عليه في المثال السابق . فإختبار الاستدلال
اللزومى التالى : —

(ص د ل) . ص : د : ل

الذى يكون فيه أحد اللقدمات منقياً ، يمكن أن يتم على النحو الآتى : —

(ص د ل) . ص : د : ل

(ك د ص) . ص : د : ك

ص . ص : د : ك

ص : د : ك

ك

(القائمة رقم ٤٩)

في هذا المثال الأخير ، تكون القضية « ل » هي النتيجة التى تقترض كذبها ،
ومن ثم تكون « ل » في المقدمة الأخرى صادقة . وبالمثل فإذا افترضنا أن المقدمة
« ص » صادقة ، كانت إذن « د » كاذبة . ومن ثم ينباع قواعد الاستدلال ،
نصل إلى مقدمة هي « ص » ونتيجة هي « ك » . وهذا يعنى أن الاستدلال نفسه
استدلال غير صحيح لأن المقدمة الصادقة لا تلزم عنها نتيجة كاذبة .

ولكى تتضح هذه الطريقة الموجزة لقوائم الصدق ، فإننا نورد الملاحظات
التالية : —

١ — إن الطريقة الموجزة لقائمة الصدق ، تبدو ملاءمة تماماً وصالحة للبرهنة على
عدم صحة استدلال ما . لكن هل تصلح هذه الطريقة لإظهار أن استدلالاً ما صحيح ؟
لنطبق هذه الطريقة بالنسبة لقاعدة الإثبات التالية :

(ص د ل) . ص : د : ل

ونرى ما الذى تنتهى إليه ، وذلك كما يلي :

(ص د ل) . ص : د : ل

(ص د ك) . ص : د : ك

إذا أنا طالما قد افترضنا كذب « ل » فى النتيجة ، فلا بد وأن نحمل هذا الافتراض بالنسبة لوجود « ل » فى المقدمتين . وبما أننا نحاول جعل المقدمتين صادقتين ، فقد وضعنا « ص » بدلا من المقدمة الثانية ، وكذا بدلا من المقدم ، فى المقدمة اللزومية .

لكن المقدمة الأولى اللزومية تصبح دالة كاذبة ، لأن الدالة اللزومية تكون كاذبة حين يكون المقدم فيها صادقا ويكون التالى كاذبا ، طالما أن المقدم الصادق لا يستلزم للتالى الكاذب وعلى ذلك فإننا نكتب :

(ك . ص) د ك

وبما أن المعطوف الكاذب ، يحمل دالة المعطوف كلها كاذبة ، فإننا نحصل على :-

ك د ك

وهكذا نصل أخيراً ، بعد تكذيب النتيجة ، إلى أننا لم نستطع أن نجعل المقدمتين صادقتين . وعلى ذلك فلاستدلال لا يمكن أن يكون غير صحيح ، ومن ثم فلا بد وأن يكون صحيحاً . فنكتب :

وهكذا إستطعنا أن نثبت أن الاستدلال صحيح عن طريق إستعالة أن يكون غير صحيح .

قد يكون هناك من يسأل : إتنا بعد تكذيب النتيجة ، إفترضنا صدق المقدمة الثانية ، فهل في إستطاعتنا أن نحصل على النتيجة ذاتها لو إفترضنا صدق المقدمة الأولى بدلا من الثانية ؟ للإجابة عن ذلك نقول ، إتنا حين نجعل المقدمة اللزومية صادقة ، علينا أن نعتبر المقدمة الأخرى كاذبة (وإلا لما حصلنا على نتيجة كاذبة) وذلك كما يلي : —

(ص د ل) . ص : د : ل

(ك د ك) . ك : د : ك

ص . ك : د : ك

ك : د : ك

ص

(القائمة رقم ٥٠)

وهكذا فإننا نصل إلى نفس النتيجة السابقة في حالة افتراض صدق المقدمة الأولى :

٢ — إن الاستدلالات التي اختبرناها بطريقة قائمة الصدق الموجزة ، كانت تحتوي في نتائجها على قضايا مفردة . فهل تصلح هذه الطريقة في حالة النتائج المركبة ؟

إتنا نستطيع استخدام الطريقة ذاتها بشكل مشر ومفيد بالنسبة للاستدلالات التي تحتوي على نتائج مركبة من أكثر من قضية . فمتسلسلة اللزوم التالية مثلا يمكن اختبارها على النحو الآتي : —

(ص د ل) . (ل د م) : د : (ص د م)

(م د م) . (م د ك) : د : (م د ك)

م . ك : د : ك

ك : د : ك

م

(القائمة رقم ٥١)

فلكي تقترض أن النتيجة (ص د م) كاذبة ، فإن هذا يعني : (م د ك) ، لأن هذه هي الحالة الوحيدة التي تؤدي إلى كذب النتيجة اللزومية ، وأعني بها تلك الحالة التي يكون فيها للقدم « ص » صادقة في حين تكون النتيجة « م » كاذبة . فإذا ما حملنا قيم المصدق هذه إلى اللقمتين ، فسنجد إننا كي نجعل للقدمة الأولى (ص د ل) صادقة ، فلا بد وأن يكون التالي فيها « ل » صادقا ، وهو ما يجعل للقدمة الثانية (ل د م) كاذبة . (وقد كان باستطاعتنا أيضاً أن نجعل للقدمة الثانية صادقة ، لو فرضنا كذب « ل » ، إلا أن ذلك كان يوجب علينا القول بكذب للقدمة الأولى (١) . وهكذا لأننا لم نستطع أن ننتهي إلى صدق اللقمتين في حالة افتراض كذب النتيجة ، فإننا ننتهي إلى القول بأن الامتدلال صحيح .

(١) في هذه الحالة تصبح القائمة على النحو الآتي :—

(ص د ل) . (ل د م) : د : (ص د م)

(م د ك) . (ك د ك) : د : (م د ك)

ك . م : د : ك

ك : د : ك

م

ولنأخذ مثلاً آخر يوضح هذا المعنى ، في حالة كون النتيجة دالة فعلية ، كما هو الحال في الاحراج للركب الآتى :—

$$(ص د ل) \cdot (م د ن) \cdot (م ص) : د : (ل ص ن)$$

وذلك على النحو الآتى :—

$$(ص د ل) \cdot (م د ن) \cdot (م ص) : د : (ل ص ن)$$

$$(ك د ك) \cdot (ك د ك) \cdot (ك ص ك) : د : (ك ص ك)$$

$$ص \cdot ص \cdot ك : د : ك$$

$$ك : د : ك$$

ص

(القائمة رقم ٥٢)

إذ بما أنه لا توجد إلا طريقة واحدة لتكذيب النتيجة الفعلية (ل ص ن) ، إلا حين تكون كل من « ل » ، « ن » كاذبتين معاً ، جاز لنا أن نحصل قيم الصديق هذه إلى المقدمات . ولذا فنحن باقتراضنا صدق المقدمتين اللزوميتين (١) ، يلزم أن نعتبر المقدمة الفعلية قضية كاذبة .

(١) كما يمكننا أن نصل إلى النتيجة ذاتها لو افترضنا صدق المقدمة الفعلية (م ص) وذلك كما يلي :

$$(ص د ل) \cdot (م د ن) \cdot (م ص) : د : (ل ص ن)$$

$$(ص د ك) \cdot (ص د ك) \cdot (ص ص) : د : (ك ص ك)$$

$$ك \cdot ك \cdot ص : د : ك$$

$$ك : د : ك$$

ص

وهكذا فنحن بإظهارنا أن عطف للتدمات (في الصف الثالث) ، هو دالة عطفية كاذبة ، وبالتالي صحة الاستدلال ، نكون قد توصلنا بشكل موجز وسريع ، إلى نفس النتيجة التي كنا نحصل عليها من قائمة صدق تكون من ١٦ مجموعة من مجموعات قيم الصدق أو من ١٦ من الصفوف .

٣ — أما حينما تكون نتيجة الاستدلال قضية عطفية ، أو معبرة عن فصل قوى ، فسيكون لدينا أكثر من إمكان واحد لتكذيب هذه النتيجة ، كما لن تكون الطريقة للوجزة اقتصادية توفر الوقت والجهد على النحو الذي تصوره أو نرجوه . فمطف قضيتين مثلاً يمكن أن يكون كاذباً في حالات ثلاث هي : —

- (أ) حين تكون إحدى القضيتين المعطوفتين كاذبة .
- (ب) أو تكون القضية للمطوفة الأخرى كاذبة .
- (ج) أو حين تكون القضيتان المعطوفتان كاذبتين معاً .

وعلى ذلك فلا بد من القيام بثلاثة تطبيقات مستقلة للطريقة الموجزة حتى نختبر صحة مثل هذا الاستدلال . (وسنحتاج إلى تطبيقين في حالة تكذيب النتيجة المعبرة عن الفصل القوى) .

أما إذا كان مثل هذا الاستدلال محتوياً على ثلاث أو أربع قضايا أساسية ترد في الدالة العطفية ، فسنبكون قائمة الصدق الكاملة التي نكتبها لهذا الاستدلال من ٨ صفوف أو ١٦ صفاً ، ومن ثم يكون تطبيق الطريقة للوجزة أفضل في هذه الحالة من حيث اختصار الوقت وتوفير الجهد . أما إذا كان الاستدلال مقصوراً على قضيتين إثنين فقط ، فإن استخدام قائمة الصدق الكاملة قد يكون أفضل من استخدام الطريقة للوجزة .

٤ — بقى بعد ذلك سؤال : لو كانت لدينا دالة تكافؤ ، مثل أحد قانونى دى مورجن ووسمناء لكى يشتمل على ثلاثة متغيرات بدلا من متغيرين على النحر الآتى : —

$$-(m \cdot l \cdot v) \equiv (-v \cdot v \cdot l - m)$$

هل تصلح القائمة للوجزة لبيان صحة هذا التكافؤ ؟

وبعبارة أخرى ، هل القائمة للوجزة خاصة بالكشف عن مدى صحة الاستدلال أم عن مدى صحة عبارة التكافؤ ؟

الواقع أن التكافؤ بين القضايا هو لزوم متبادل ، أو هو استدلال مشترك . ولذا فإننا فى مثل هذه الحالة نستخدم قائمتين موجزتين ، كل واحدة منهما خاصة بأحد الاستدلالتين للتضمنين فى التكافؤ . وبعبارة أخرى نستخدم قائمة موجزة مزدوجة للتعبير عن صحة هذه الصيغة وذلك كما يلى : —

أن الصيغة الرمزية يمكن أن تنحل إلى قضيتي اللزوم التاليتين : —

$$(1) -(m \cdot l \cdot v) : \supset (-v \cdot v \cdot l - m)$$

$$(2) (-v \cdot v \cdot l - m) : \supset -(m \cdot l \cdot v)$$

ومن ثم : —

$-(m \cdot l \cdot v) : \supset (-v \cdot v \cdot l - m)$			$(-v \cdot v \cdot l - m) : \supset -(m \cdot l \cdot v)$		
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$
$-(m \cdot l \cdot v)$	\supset	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	$(-v \cdot v \cdot l - m)$	\supset	$-(m \cdot l \cdot v)$

(القائمة رقم ٥٣)

بهذه الطريقة نكون قد وفرنا ربما نصف الوقت المطلوب لتكوين قائمة صدق كاملة توضح أن دالة التكافؤ للذكورة دالة صحيحة .

هكذا ننتهى إلى القول بأننا نستطيع استخدام أكثر من نوع من أنواع قوائم الصدق ، نلخصها فى الآتى :—

- ١ — قوائم الصدق الكاملة مثل القوائم رقم ١٢ ، ١٣ ، ١٥ وغيرها .
- ٢ — قوائم الصدق للبسطة مثل القائمة رقم ١٦ وغيرها .
- ٣ — قوائم الصدق الأكثر تبسيطاً مثل القوائم رقم ١٧ ، ٣٠ ، ٣٨ ، ٤٠ وغيرها .
- ٤ — قوائم الصدق للزدوجة الخاصة بتحصيل الحاصل ، مثل القائمة رقم ٤٥ وغيرها .
- ٥ — قوائم الصدق للوجزة مثل القوائم ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ وغيرها .
- ٦ — قوائم الصدق للزدوجة الخاصة بالتكافؤ ، مثل القائمة ٥٣ .
- ٧ — فضلا عن طريقة فتجلشتين فى استخدام الأقواس للتعبير عن مجموعات الصدق .

الفصل الرابع

الحساب التحليلي لدالات القضايا

Calculus of Propositional Functions

دالات القضايا :

الواقع أن صور الاستدلال السابق ذكرها في الفصلين الحاصين بحساب الفئات وحساب القضايا ، لا يمكن تطبيقها بالنسبة لكثير من الاستدلالات العادية . ويمكن التعبير عن ذلك بشكل أكثر دقة ، لو قلنا إن حسابي الفئات والقضايا لا يكفيان للتعبير عن جميع القضايا والاستدلالات ، وذلك للأسباب التالية : —

١ — أن حساب القضايا لا يهتم بالقضايا — كما ذكرنا من قبل — من حيث مكوناتها (أو الحدود التي تتألف منها) ، بل يتناول القضية ككل واحد ، ومن ثم يبحث في الإجراءات التي تتخذ حيالها ، والعلاقات التي يمكن أن تنشأ بينها ، ولذا فقد استخدمنا للتغيرات p ، q ، r ، ... للتعبير عن القضايا ، أيًا كانت « p » أو « q » . ولو ضربنا لذلك مثلاً قلنا : (أن علاقة اللزوم مثلاً لا نجربنا بشيء عن تحليل القضية من حيث مكوناتها ، بل نجربنا عن علاقة تقوم بين قضية ، أو قضايا ، كمقدمة أو مقدمات ، وبين قضية أخرى كنتيجة . وهذا ما ينطبق بالنسبة لغير ذلك من الإجراءات والعلاقات في حساب القضايا)^(١) .

ولهذا السبب فإننا ننتهي إلى أن حساب القضايا لا يغنينا عن دراسة تستهدف معرفة مكونات القضايا أيضاً . أي دراسة (تنجس إلى تحليل البنية المنطقية للقضايا ،

ومنها إلى الحساب التحليلي للدالات (١) .

٢ — إذن هل يفي حساب الفئات بهذا الغرض ؟ حقاً إن هذا الحساب يتناول الفئات من حيث هي مكونات القضايا . لكننا حين تناولنا قضايا الفئات ، وخاصة من حيث السكم فيها ، قسمناها إلى قضايا كلية ، وقضايا وجودية (جزئية أو مفردة) بناء على معرفة كم الموضوع مع إغفالنا ما يتعلق بالمحمول وبالسكم الخاص به . وعلى ذلك فالحساب الذي أوردناه لفئات (ولقضايا الفئات) ، قاصر عن أن يستوفي السكم الخاص بجميع مكونات القضية . فضلاً عن قصوره عن بلوغ التحليل الدقيق والكامل للبنية المنطقية للقضايا .

وهكذا ، فبما أن الحساب التحليلي السابق — بنوعيه — لا يفي بالغرض ، فإن علينا أن نبحث عن نوع جديد من الرمزية للمنطقية (٢) يفي بمثل هذا الغرض ، (ويعتبر خطوة متطورة في للنطق للعاصر تتجاوز في تطورها حساب القضايا) ، (٣) وكذا حساب الفئات ، فضلاً عن للنطق الحلي القديم بصفة عامة .

ويسمى هذا النوع من الحساب التحليلي للنطق — بالإضافة إلى الإسم الذي ذكرناه في بداية هذا الفصل ، وهو الحساب التحليلي لدالات القضايا — بأسماء متعددة . فإرد عند كوين Quine, W.V.O. في كتابه «النطق الرياضي» (٤) مرتبطاً بنظريته العامة في التحوير Quantification ، كما يرد في بعض كتب للنطق تحت إسم «الحساب التحليلي للمحمول» Predicate calculus ، مثل كتاب

(١) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 80

(٢) Hilbert, D. & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 56.

(٣) Moutant, J. A. : Formal Logic, P. 341.

(٤) Quine, W.V.O. : Mathematical Logic, (ch. II), P. 63.

« للنطق الصوري » لمورانت J. A. Moutant (١) وكتاب « للنطق للعاصر » ،
والصياغة الصورية « لروجيه مارتين (٢) Roger Martin ، وكتاب « مقدمة للنطق
الرمزي » لرودلف كارب Carnap, R. (٣) وغيرها من الكتب التي تأثرت بهذه
التسمية التي ذهب إليها هيلبرت Hilbert, D. ، وأكرمان Ackermann, W. في
الطبعة الثانية لكتابهما « أسس للنطق الصوري » (٤) وذلك حين غير أكرمان
من استخدام تعبير « حساب الدالة » Funktionenkalkul الوارد في الطبعة الأولى
وجعله « حساب المحمول » Pradikatenkalkul في الطبعة الثانية (٥) . (وهكذا
يصبح إسم « المحمول » Pradikat الذي يستخدمه هيلبرت وأكرمان ، دالا على
نفس الأشياء التي نسميها باسم « دالات القضايا » (٦) .

(١) Moutant, J. A. : Formal Logic, (ch. III, P. 339).

(٢) Martin, R. : Logique Contemporaine et Formalisation (pp. 71-81, 166).

(٣) Carnap, R. : Introduction to Logic, P. 38

(٤) « Grundzuge der Theoretischen Logik » عام ١٩٣٧ وكانت طبعته الأولى عام ١٩٢٨ . وقد ترجم إلى اللغة الإنجليزية عن الطبعة الثانية (من الترجمة ،
« مبادئ للنطق الرياضي » عام ١٩٥٠ Principles of Mathematical Logic
(٥) وفي هذا الصدد يقول أكرمان في مقدمة الطبعة الثانية (من الترجمة الإنجليزية،
صفحة IX) مايلي :

(لقد تم تغيير للمصطلحات في هذه الطبعة بما يتفق مع المصطلحات الواردة في
كتاب هيلبرت وبرنايز « أسس الرياضيات » . فمثلا قد وضعنا في هذه الطبعة مصطلح
حساب المحمول بدلا من « حساب الدالة » ، حيثما ورد في الطبعة الأولى) .

(٦) Church, A. : Introduction to Mathematical Logic, Vol. I,

والواقع أن الاختلاف في تسمية دالات القضايا لا ينصرف فقط إلى ما ذهب إليه هيلبرت وأكرمان ويرنايز من القول بحساب المحمول ، إذ يستخدم تارسكي في كتابه « مقدمة للنطق » للمصطلح : « الدالة الجملية » أو (دالة القضية) Sentential function (١) ، كما يستخدم كراين المصطلح « مصفوفة العبارة » Statement matrix (٢) ، في حين يفضل كل من هارولد لي Lee, H. وسوزان لانجر Langer, S. استخدام المصطلح « صورة القضية » Propositional Form . فيذهب هارولد لي في كتابه « النطق الرمزي » إلى القول التالي : (لقد أسيئت الرموز : س (س، ص) و . . . وغيرها بصور القضية ، وأنا في هذا أتبع المصطلح الذي إستخدمه Sheffer, H, M. شيفر . . . ويلاحظ أن هوايتهد Whitehead, A, N. ورسل Russell, B. يسميان هذه الرموز في كتابهما « المبادئ الرياضية » بدالات القضايا . ولعل استخدامهما لكلمة دالة Function راجع إلى تأثيرها بالأساس الرياضي (٣) . كما تعبر عن هذا المعنى نفسه سوزان لانجر في كتابها « مقدمة للنطق الرمزي » بقولها : (إن أغلب كتب للنطق الرمزي ، وخاصة كتاب « المبادئ الرياضية » لهوايتهد ورسل ، تسمى مثل هذا التعبير الذي يأخذ صورة القضية ، لكنه يحتوي على متغير واحد على الأقل ، باسم دالة القضية . وعندى أن هذه التسمية ليست موفقة ، لأنها لا تكاد تعطي مفهوماً واضحاً وضوحاً كاملاً عند الذين ليسوا على دراية كاملة بالرياضيات . والواقع أن أصل هذه التسمية يتضح بما فيه الكفاية ، لو تذكرنا أن

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, p, 5

وقد فضلنا ترجمتها بدالة القضية بدلا من الدالة الجملية في ترجمتنا العربية لهذا الكتاب .

(٢) Quine, W, V, O. : Mathematical Logic, p, 32

(٣) Lee, H, N. : Symbolic Logic, p, 26

كبار مؤسسى المنطق الرمزى — مثل بول G, Boole ، وفريجه G, Frege ،
وشرويدر E, Schroder ، وبيانو G, Peano وهوايتهد ورسل وغيرهم — كانوا
أساساً من الرياضيين ، الذين كانت توحى إليهم ، الصورة للمنطقية الفارغة وقيمها ،
بلفظ الدالة والقيم من الرياضيات . ومن ثم فقد أصبح للتغير الذى تكون قيمه
قضايا ، يسمى « بدالة القضية » ، وأصبح يرد بصفة عامة فى كتب للمنطق بهذا الاسم .
لكن كلمة « دالة » Function متعددة المعانى ، لذا فإننى سوف أستخدم اسماً أكثر
وضوحاً ، وإن كان أقل تداولاً — وهو « صورة القضية » Propositional form (١) .
إلا أننا سوف نتبع فى هذا الكتاب التسمية الأولى أى « دالات القضايا » ، وقد
فضلنا استخدام هذا المصطلح للأسباب الآتية :-

أولاً : لورود هذا المصطلح لدى أغلب المناطقة المعاصرين مثل : رسل وهوايتهد
فى كتابهما « للبادئ الرياضية » Principia Mathematica ، ورسل فى كتابه
« أصول الرياضيات » ، و « مقدمة للفلسفة الرياضية » (٢) ، وتشيرش فى كتابه
« مقدمة للمنطق الرياضى » (٣) وهانز رايشنباخ H, Reichenbach فى كتابه
« عناصر المناطق الرمزى » (٤) وغيرهم .

ثانياً : إن كلمة « دالة » مستخدمة بالفعل فى كتب المنطق المكتوبة باللغة العربية
مترجمة كانت أو مؤلفة (٥) . ومن ثم فالكلمة كادت أن تستقر ويثبت إستخدامها
فى كتب المنطق العربية ، ولا يوجد مبرر قوى يدعو إلى تغييرها .

(١) Langer, S, : An Introduction to Symbolic Logic, pp, 90-91

(٢) ولهذين الكتاين ترجمة عربية ، أنظر قائمة المراجع فى آخر هذا الكتاب .

(٣) Church, A, : Introduction to Mathematical Logic, p. 289

(٤) Reichenbach, H, : Elements of Symbolic Logic, p,80

(٥) فقد أوردها الدكتور زكى نجيب محمود فى كتابه « المنطق الوضعى » =

ثالثا : إن كلمة « دالة » مستمدة أساسا من الرياضيات ، ونحن نرى - مع رسل وفجنتشتين وغيرها من الناطقة للعصرين - الرابطة القوية التي تربط المنطق والرياضيات ، ومن ثم فلا غضاضة هناك من استخدام كلمة دالة في المنطق .

الآن ، ما هي دالة القضية ؟ للإجابة عن هذا السؤال علينا أولا أن نعرف ما هي الدالة function ؟

الدالة في الرياضة تصور يعبر عن عدم الاتصال ، أو عن العلاقة بين عنصرين في مجموعتين متعلقين . ويعرفها ديريشليه Dirichlet على النحو الآتي : (إن دالة للتغير s ، بالنسبة لمجال معين ، هي الكمية s ، التي تفترض قيمة محدودة لكل قيمة من قيم s) (١) . ولنأخذ هذا المثال لتوضيح ذلك : ففي التعبير « $s + ١٢$ » من مجال الرياضيات نجد أن قيمة حاصل الجمع ، إنما تتوقف على معنى s أو قيمتها . ولذا يسمى هذا التعبير بأنه دالة s (٢) . فإذا طبقنا ذلك بالنسبة للمنطق ، أمكننا القول بأن دالة القضية هي التعبير الذي لا يعطي معنى محدد ، ومن ثم لا يقدم لنا خبرا يحتمل الصدق أو الكذب ، طالما أنه يحتوي على حد أو حدود غير متعينة القيمة مثل « s » في دالة القضية التالية : -

« s إنسان »

== والدكتور عبد الرحمن بدوي في كتابه « المنطق الصوري والرياضي » ، كما وردت في الترجمة العربية لكتابه رسل « أصول الرياضيات » و « مقدمة للفلسفة الرياضية » ، وفي الترجمة العربية لكتاب يان لوكاشيفتش « نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر للمنطق الصوري الحديث » ، وغير ذلك .

(١) Carruccio, E. : Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought, P. 306.

(٢) Langer, S. : An Introduction to Symbolic Logic, P. 319.

فمثل هذا القول يعتبر دالة قضية ولا يعتبر قضية طالما أن الموضوع « س » غير محدد . أما لو استبدلنا بـ « س » لفظا آخر مثل « سقراط » ، تحولت هذه الدالة إلى القضية التالية : —

« سقراط إنسان »

التي يمكن الحكم عليها بالصدق أو بالكذب . وكذلك لو وضعنا بدلا من « س » لفظا ثانيا مثل « أفلاطون » ، تحولت الدالة إلى قضية صادقة هي : « أفلاطون إنسان » . ومن ثم فإننا ننتهي إلى القول بأن التعبير « س إنسان » دالة قضية تتحول إلى قضية لو وضعنا فيها بدلا من الرمز « س » أى لفظ يتفق مع المحمول « إنسان » مثل سقراط ، أفلاطون ، أرسطو . فنحصل على القضايا : —

١ - سقراط إنسان

٢ - أفلاطون إنسان

٣ - أرسطو إنسان

ويكون التعبير « س إنسان » في هذه الحالة دالة قضية لأى واحدة من القضايا الثلاث السابقة ، أو كأنه على حد تعبير رسل (صورة تخطيطية لأى واحد من فصل [أى فئة] بأجمعه من القضايا) (١) .

وعادة ما تأخذ للوضوعات والمحمولات في المنطق للعناصر أسماء أخرى ، فنستخدم بدلا من « س » كلمة « متغير » Variable في مقابل كلمة « ثابت » Constant ،

(١) برتراند رسل : أصول الرياضيات (ترجمة د . محمد مرسى أحمد ، د . أحمد فؤاد الأهواني) ، الجزء الأول ، صفحة ٥٤ .

ونستخدم بدلا من « إنسان » كلمة « دالة » *function* . وفيما يلي أهم المصطلحات الخاصة بحساب دالات القضايا : -

أولا : للتغيرات والثوابت :

للتغيرات رموز ليس لها معنى بذاتها (١) بل هي تدل على مجهولات يمكن أن توضع بدلا منها أسماء لأشياء معينة ثابتة . ويسمى ما يوضع بدلا من مجهول أو مجهولات التغير ، بقيمة أو قيم هذا للتغير . ومن ثم يمكن تعريف التغير بأنه (ذلك الرمز الذي يكون معناه شيئا بمعنى إسم العلم أو الثابت ، باستثناء إمكان إستبدال الدالة المفردة الخاصة بالثابت ، بإمكان تعدد قيم للتغير) (٢) .

وهكذا فإننا نسمى « س » في المثال السابق « س إنسان » بالتغير الذي تكون له قيم *Values* مختلفة ، مثل (أفلاطون ، سقراط ، محمد ، علي . .) . كما نسمى العبارة « س إنسان » بدالة القضية . وعلى ذلك فإننا نعرف دالة القضية بشكل مبسط بأنها تلك العبارة التي تحتوي على متغير واحد على الأقل . أما القيم التي يمكن أن توضع بدلا من التغير في دالة القضية فتحيلها إلى قضية يمكن الحكم عليها بالصدق أو بالكذب ، فتسمى بالثوابت *Constants* (والثابت بهذا المعنى يكون مراد فالاسم العلم ذي الدلالة) (٣) ، أو هو (ما يجب أن يكون شيئا محددًا تحديدا مطلقا ، شيئا لا إيهام فيه ألينة) (٤) ، بحيث لا يتغير معناه رغم اختلاف مواضعه . مثل كلمة « أفلاطون » التي يكون معناها ثابتا سواء قلنا : « أفلاطون فيلسوف » أو « أفلاطون أثيني » أو « أفلاطون إنسان » .

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 5.

(٢) Church, A. : Introduction to Mathematical Logic, P. 9.

(٣) المرجع السابق ، للوضع نفسه .

(٤) رسل : أصول الرياضيات ، الجزء الأول ، صفحة ٣٥ .

هذا وقد يشبه أحيانا دور للتغيرات في دالة القضية ، بدور الثغرات أو المسافات الخالية في قوائم الاستبيان questionnaire . وكما أن الاستبيان لا يصبح ذا مضمون محدد إلا بعد ملء الفراغات الموجودة به ، فكذلك لا تصبح دالة القضية ، قضية حقيقية إلا بعد وضع ثوابت معينة بدلا من التغيرات (١) . ولقد عبر رايشباخ عن مثل هذا المعنى بقوله : (لنأخذ مثلا لذلك التعبير التالي « . . . طويل » . فنحن حين نملأ الفراغ الموجود في هذا التعبير باسم علم مناسب ، فإن هذا التعبير يتحول إلى قضية يتوقف صدقها أو كذبها على إسم المجهول الذي اخترناه . وهكذا قد تكون القضية « بطرس طويل » صادقة ، بينما قد تكون القضية « بول طويل » كاذبة . في مثل هذه الحالة فإننا نقول بأن الجملة الناقصة التالية « . . . طويل » هي دالة قضية (٢) . ولعل هذا هو السبب في تعريف رايشباخ دالة القضية على أنها (قالب أو صورة نصب فيها مضمونا أو محتوى ما) (٣) ، وهو نفس المعنى الذي عبر عنه رسل بقوله : (ما دالة القضية ؟ دالة القضية إذا قامت وحدها فقد تؤخذ على أنها مجرد هيئة ، مجرد غلاف ، قابل ، فارغ للمعنى ، لا على أنها شيء له دلالة سابقة) (٤) .

هكذا يمكننا توسيع معنى دالة القضية ، بعد أن عرفنا للتغير والثابت ، فنعرفها بأنها :

(عبارة تشتمل على مكون غير محدود [أى متغير] أو أكثر ، بحيث لا تصبح العبارة قضية إلا عند تعيين قيم للسكونات) (٥) ، أو بأنها (ذلك التعبير الذى يتضمن

(١) Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 5.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 82

(٣) للرجع السابق ، صفحة ٨٦ .

(٤) رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية . (ترجمة د . محمد مرسى أحمد ، مراجعة

د . أحمد فؤاد الأهواني) صفحة ٢٢٩ .

(٥) للرجع السابق ، صفحة ٢٢٧ .

متغيرات ، والذي يصبح قضية ذات معنى لو وضعنا ثوابنا بدلا من المتغيرات الواردة فيه (١)

المحمولات :

لو رجعنا إلى المثال السابق ، وهو دالة القضية (س إنسان) للاحظنا أننا نستطيع أن نضع بدلا من المتغير «س» الثوابت التالية : «سقراط» ، «ارسطو» ، فنحصل في كل مرة نضع فيها ثابنا من هذه الثوابت على قضية صادقة . وتسمى الثوابت التي توضع بدلا من المتغير فنحصل منها على قضايا صادقة ، بالقيم التي تستوفي Satisfying دالة القضية (٢)

ولنفرض الآن أننا وضعنا بدلا من المتغير «س» في دالة القضية السابقة ، للثابت التالي : «هذا القط» ، فإننا نحصل على القضية «هذا القط إنسان» وهي قضية كاذبة . أما لو وضعنا بدلا من المتغير «س» ، كلمة «الفضيلة» في دالة القضية السابقة ، لحصلنا على عبارة خالية من المعنى وهي : «الفضيلة إنسان» . وتسمى الثوابت التي توضع بدلا من المتغير في دالة القضية ، فنحصل بواسطتها إما على قضايا كاذبة ، أو على عبارات لا معنى لها ، تسمى بالقيم التي لا تستوفي دالة القضية . وبعبارة أخرى فكل القيم التي لا تحيل دالة القضية إلى قضية صادقة ، هي قيم لا تستوفي دالة القضية .

لكن كيف نميز بين القيم التي تستوفي دالة القضية ، وتلك التي لا تستوفيها ؟ كيف نعرف أن هذا الثابت الذي سوف نضعه بدلا من المتغير «س» سيحيل دالة

Tarski, A. : Introduction to Logic. P. 5.

(١)

(٢) للرجع السابق ، الموضع نفسه .

القضية إلى قضية صادقة ٢. لنأخذ المثال الآتي (١) من مجال الرياضيات ، ولنفرض أن لدينا دالة القضية التالية : « $s \geq 3$ » فإتينا نلاحظ أن الأعداد ١ ، ٢ ، $\frac{1}{4}$ ، مثلا هي التي تستوفي الدالة ، في حين أن الأعداد ٣ ، ٤ ، $\frac{1}{2}$ لا تستوفي هذه الدالة. كيف عرفنا إذن أن المجموعة الأولى من الأعداد تستوفي الدالة في حين لا تفعل ذلك المجموعة الثانية ؟ عرفنا ذلك بناء على معرفتنا بمعنى « أصغر من ٣ » أو « $s < 3$ ». فالأعداد ١ ، ٢ ، $\frac{1}{4}$ كلها أصغر من ٣ بالفعل ، أما الأعداد ٣ ، ٤ ، $\frac{1}{2}$ فهي ليست أصغر من ٣ . وعلى ذلك فهناك مجموعة من القيم (الأعداد) تصلح لأن توضع مكان المتغير لكي تستوفي الدالة ، ويكون مجال هذه المجموعة من القيم محدوداً بذلك الجزء الآخر (غير المتغير) من الدالة ، وهو « أصغر من ٣ » .

لو طبقنا ذلك على دالة القضية « s انسان » في المنطق ، لقلنا ان مجموعة القيم التي تستوفي دالة القضية ، إنما تتوقف على لفظ « انسان » . فالثابت الذي يمكن أن يتصف بالصفة « انسان » يكون من بين القيم التي تستوفي دالة القضية ، أما الثابت الذي لا يمكن اتصافه بصفة « انسان » فلا يكون من بين القيم التي تستوفيها . وبما أن كلمة « انسان » هي — في المنطق التقليدي القديم — المحمول في كل قضية مثل (سقراط انسان) تنتج عن دالة القضية « s انسان » ، فإننا ننتهي إلى أن المحمول « انسان » هو الذي يحدد مجال قيم المتغير في دالة القضية « s انسان » ، وبمعنى آخر ، هو دالة « s » (٢)

وهكذا فإننا نميز في دالة القضية السابقة (s انسان) بين المتغير « s » ، وبين المحمول أو الدالة « انسان » . الآن لو أردنا أن نعبر عن هذا المحمول تعبيراً رمزياً ،

(١) هذا المثال مأخوذ من كتاب « مقدمة للمنطق » لـ تارسكي . (المرجع السابق) ، صفحة ٦

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 81. (٢)

فإننا نستخدم الرمز « د » (١) أو « د » تعبيراً عنه كدالة للمتغير « س » . ومن ثم يمكننا أن نكتب دالة القضية السابقة بطريقة رمزية على النحو الآتي : —

د (س)

أو بشكل أكثر تبسيطاً : د س .

وأعود مرة أخرى فأقول ، أن علينا أن نفرق بين المصطلحين التاليين فلا نخلط بينهما : —

١ — دالة القضية Propositional Function مثل « د (س) » أو د س .

٢ — وبين الدالة Function ، وهى ذلك الجزء من دالة القضية ، والذي يعتبر داله بالنسبة للمتغير « س » الوارد فى دالة القضية .

تصنيف الدالات طبقاً لعدد المتغيرات :

من الأمثلة السابقة نلاحظ أننا كنا نستخدم متغيراً واحداً فى دالة القضية، لكن ليس من الضروري أن تكون دالة القضية ذات متغير واحد فقط ، فهى يمكن أن تكون ذات متغيرين أو ثلاثة متغيرات أو أكثر .

١ — لنفرض أن لدينا العبارة التالية : —

« محمد أطول من على » .

ولنحاول التعبير رمزياً عنها . فى مثل هذه العبارة نقوم بوضع متغيرات بدلاً من

(١) وهو أول حرف من حروف كلمة « دالة » . وعادة ما تستخدم فى الكتب الأجنبية الرموز للعبارة عن الدالات من حروف الأبجدية اليونانية مثل ϕ ، ψ وغيرها .

إسمى العلم « محمد » ، « على » ، مثل « س » ، ص على الترتيب . ومن ثم فإننا نكتب العبارة على النحو الآتي : —

(س أطول من ص)

وعلى ذلك تكون صفة « أطول من » هي دالة المتغيرين س ، ص . وبما أننا نكتب رمز الدالة أولاً قبل رمز المتغير ، فإننا نستطيع التعبير عن القول السابق بدالة القضية التالية :

د (س ، ص) .

وهي دالة قضية ذات متغيرين . وبلاحظ في هذه الحالة أننا نقول : —

(أ) أن الدالة « د » ذات متغيرين^(١) .

(ب) وأن دالة القضية كلها ، هي كذلك ذات متغيرين .

ولنقارن الآن بين القضيتين التاليتين : —

١ — « أفلاطون إنسان » د د س .

٢ — « محمد أطول من على » د (س ، ص) .

فإننا نلاحظ أن الأولى تتكون تقليدياً من موضوع ومحمول ، وقد اعتبرنا أن المحمول هو الدالة فيها حين عبرنا عنها بدالة القضية « د س » . أما القضية الثانية فلا تتكون في حقيقتها من موضوع ومحمول ، بل هي قضية علاقية بالدرجة الأولى . بمعنى أن هناك حدين هما « محمد » ، « على » يرتبطان بعلاقة هي « أطول من » ، شأنها في هذا شأن القضايا العلاقية التالية « س على عيسى ص » ، « محمد يحب

(١) ويسمى رايشنباخ بالدالة ذات للوضعين :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 83.

صديقه » ، وغير ذلك من العبارات التي لا تتكون من موضوع ومحمول ، بقدر ما تتكون من موضوعين مرتبطين بعلاقة .^(١) ولقد عبر رسل عن هذا المعنى بقوله : (كثيرا ما قيل إن كل قضية يمكن ردها إلى أحد أنواع القضايا الحولية ، غير أننا سنجد .. كثيرا من الأسباب لرفض هذه الوجهة من النظر . ومع ذلك يمكن القول بأن جميع القضايا غير الحولية ، والتي لا تحكم على أعداد ، يمكن ردها إلى قضايا مشتملة على حدين وعلاقة) (١) وهذا هو السبب الأساسي (٢) في أننا لم نأخذ بالتسمية التي ذهب إليها هيلبرت وأكرمان ، وغيرها ممن عبروا عن حساب دالات القضايا باسم حساب المحمول . إذ ليست جميع القضايا هي مما يتكون من موضوع ومحمول بينهما علاقة تضمن أو اشتغال كما هو الحال في القضايا الحولية في المنطق التقليدي (٣) ، بل هناك قضايا أخرى تقوم على علاقات أخرى غير علاقة التضمن أو الاشتغال مثل العلاقات المكانية أو الزمانية وغيرها . وإلا كان علينا أن نوسع من معنى المحمول التقليدي (نفهم من المحمولات أسماء كل من الصفات والعلاقات) (٤) وهذا ما فعله هيلبرت الذي اعتبر العلاقة المكانية نوعا من المحمول أو هي جزء منه ، فهو يذكر في كتابه « مبادئ المنطق الرياضي » المثال التالي من الهندسة فيقول : (يمكن مثلا التعبير عن العلاقة الأساسية في الهندسة المستوية : القائلة بأن « النقطة س تقع على الخط ص » باستخدام الرمز التالي ذي التعبيرين كما يلي : « د (س ، ص) »

(١) رسل : أصول الرياضيات . (الجزء الأول) ، صفحة ١٦٥ .

(٢) بالإضافة إلى الأسباب الثلاثة سالفة الذكر .

(٣) إرجع إلى كتاب « أصول الرياضيات » لبرتراند رسل ، الجزء الأول ،

صفحتي ١٤٨ — ١٥٤ .

(٤) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.83. (٤)

في هذا التعبير الرمزي تكون قيم S هي النقاط فقط ، كما تكون قيم V هي الخطوط المستقيمة فقط (١) .

٢ — ولنفرض أننا نريد التعبير رمزيا عن القضية التالية :

(أ) « الأرض بين الشمس والقمر » .

أو القضية التالية : (ب) « محمد أعطى عليا كتابا » .

فإننا نضع بدلا من الثوابت فيهما متغيرات مثل : —

(S بين V ، و)

أو (S أعطى V ، و)

ثم نعبر عن الدالة في العبارة الأولى بالرمز « د » وعن الدالة في العبارة الثانية بالرمز « و » فنحصل على دالتى للقضية التاليتين : —

(أ) د (S ، V ، و)

و (ب) و (S ، V ، و)

وتسمى كل واحدة منهما بدالة للقضية ذات المتغيرات الثلاثة ، طالما أن الدالة « د » أو « و » في كل منهما تتعلق بمتغيرات ثلاثة . وهكذا فإننا نستطيع تكوين دالات ذات متغير واحد أو متغيرين أو ثلاثة متغيرات أو أربعة (أو أكثر من ذلك بالنسبة لعبارات أكثر تركيبا وتعقيدا مثل العبارات التي تكون المجهولات فيها متعلقة بالسكان — الزمان) (٢) .

(١) Hilbert, D & Ackermann, W. : Principles of Mathematical

Logic, P. 58.

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 84. (٢)

أنواع المتغيرات :

يلاحظ في المثال السابق أننا قد استخدمنا الرمزين « د » ، « و » تعبيرا عن الدالتين « بين » ، « أعطى » . ومن ثم فإننا نكون قد استخدمنا الرمزين « د » ، « و » كمتغيرات للدالة التي توجد في دالة القضية . وعلى ذلك يمكننا أن نصنف للمتغيرات إلى نوعين على الأقل هما : -

١ - متغيرات للمفردات الجزئية (أو المجهولات) Individual variables

مثل س ، ص ، ...

٢ - متغيرات للدالات مثل : د (.) ، و (. ، .) . . . ويسمى هيلبرت

باسم متغيرات المحمول Predicate variables (١)

كما يمكننا أن نصنف المتغيرات تصنيفا آخر طبقا لمدى ارتباطها بسور القضية ، أو بمعنى آخر بعلامة السور التي تضاف إلى دالة القضية . فنسمى المتغير المرتبط بالسور باسم المتغير المقيد bound ، ونسمى المتغير الذي لا يرتبط بالسور بالمتغير الحر Free . وسوف نعود إلى تفصيل ذلك بعد أن نعرض لوظيفة السور في القضية فيما يلي . .

الأسوار : Quantifiers

عرضنا من قبل لكيفية الحصول على القضايا من دالات القضايا ، وذلك بوضع الثوابت مكان المتغيرات ، وتسمى هذه الطريقة باسم طريقة التخصيص Specialization (٢) . وهناك طريقة أخرى للحصول على القضايا من دالات القضايا،

(١) Hilbert, D & Ackermann, W. : Principles of Mathematical Logic, P. 59.

(٢) Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 86.

هى تصوير الدالات أو تكبيها Quantification ، وذلك بوضع السور Quantifier — ويسمى كذلك بعامل الاجراء Operator (١) الذى يحدد كمها — قبل الدالة (٢) .

والسور كما نعرف فى المنطق قد يكون كلياً Universal أو قد يكون وجودياً Existential ، وهذا ما أشرنا إليه فى حساب قضايا الفئات من قبل . وسوف نستخدم هذا التصنيف نفسه فى حساب الدالات والقضايا المسورة ، وذلك كما يلى : —

أولا : السور الكلى : Universal quantifier

وينقسم بدوره — من حيث للكيف — إلى نوعين ، سور كلى موجب وسور كلى سالب .

١ — السور الكلى الموجب :

(١) لو كانت لدينا دالة القضية : د س .

وأردنا أن نحولها إلى قضية عامة أو كلية فأتنا نكتبها على النحو الآتى : —

(بالنسبة لكل س ، تكون إذن « د س ») . وهذا ما نعبر عنه رمزياً على

النحو الآتى : —

(س) د س .

فإذا ما ذكرنا أى معنى محدد للدالة « د » ، كانت العبارة السابقة قضية لا دالة

(١) المرجع السابق ، صفحة ٨٧ .

(٢) يستخدم رايشنباخ فى كتابة السابق ، صفحة ٨٧ بدلا من المصطلح «تسوير» مصطلح تقييد المتغيرات binding of variables وسوف نعود إلى هذا المصطلح الأخير حين نعرض لمجال الأسوار .

قضية ، على الرغم من أنها تشتمل على التعبير « س » ، وذلك لأن التعبير السابق متكون له قيمة صدق محددة . وهكذا إذا كانت « د س » تعنى أن « س أزرق اللون » ، فإننا نحصل على قضية يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة وهى : بالنسبة لـ « س » ، فإن س يكون أزرق اللون ^(١) .

ب — ولعل التعبير عن القضية الكلية يكون أكثر وضوحاً لو كانت دالة للقضية ، مركبة من أكثر من دالة مثل : —

(س) (د س \supset و س) . (٢)

وهى الصورة العامة للقضية الكلية للوجبة . ونقرأ : أنه بالنسبة لـ « س » ، لو كانت « د س » ، لكانت إذن « و س » . فإذا كانت « د » تعنى « إنسان » ، وكانت « و » تعنى « فأنى » ، كانت إذن الصيغة السابقة ، هى القضية التالية : « بالنسبة لكل س ، فإن القول بأن « س » إنسان يستلزم القول بأن س فأن » ، أو هى القضية التالية : —

« كل إنسان فأن » . (٣)

ونحن عادة ما نكتب علامة السور (س) على يمين القضية ، كما نضع القضية بين قوسين لكي نوضح أن السور ينطبق على كل التعبير الذى يكون القضية (٤) . وسوف

(١) للرجع السابق ، صفحة ٨٨

(٢) ويعبر عنها رايشباخ على النحو الآتى : (س) [د (س) \supset و (س)] .
المرجع السابق ، للوضع نفسه .

(٣) للرجع السابق ، للوضع نفسه .

Mourant, J. A. : Formal Logic, P. 346.

(٤)

نسمى الرمز «(س)» بالسور الكلى، أو بجامل الإجراء الكلى all-operator (١) ..

السور الكلى للسالب

لو كانت لدينا القضية الكلية السالبة التالية : « الشخص السعيد لا يكون مشغولا بنفسه » ، وهى تعنى « إذا كان هناك شخص سعيد ، فهو لا يكون مشغولا بنفسه » . وإذا رمزنا للعبارة « س شخص سعيد » بالرمز « د س » وللعبارة « س مشغول بنفسه » بالرمز « و س » ، استطعنا أن نرمز للعبارة « س ليس مشغولا بنفسه » بالرمز « - و س » (وذلك باستخدام ملامة نفي القضية « - » لنفي « و س » فتصبح « - و س ») (٢) . ومن ثم فإننا نحصل على الصيغة التالية ، التى تعبر عن الصورة العامة للقضية الكلية السالبة :

$$(س) (د س \supset - و س)$$

وتقرأ : بالنسبة لأى س ، إذا كان س هو د ، فإنه يلزم عن ذلك أن لا يكون س هو و . وقد تكتب الصيغة السابقة بشكل أبسط على النحو الآتى : -

(١) ويرجع استخدام العلامات للأسموار فى المنطق الرمضى بصفة عامة إلى بيرس الذى أدخل فى منطقته ، وقدم الرمز π ، للتعبير عن السور الكلى « كل » ، أو السور الجزئى « بعض » - على الترتيب . وذلك فى كتابه للمنطق الصحيح Exact Logic ، الفقرة رقم ٢٩٣ . وهو الكتاب الثالث من مجموعة مؤلفاته :

Collected Papers

(٢) ويستخدم رايشنباخ علامة نفي الحدود ، فيعبر مثلا عن نفي « و س » بالشكل الآتى : $\overline{(و س)}$.

(س) د س (١)

ثانياً : السور الوجودى :

١ — للوجب :

فرقنا من قبل بين القضية الكلية وبين القضية الجزئية فى أن الأولى لا تسكلم عن وجود ما صدقات بالفعل ، إنما نخبرنا أنه إذا كانت هناك أعضاء فى فئة معينة ، فإنها ستكون متصفة بكذا وكذا من الصفات الواردة فى المحمول . فإذا كانت لدينا القضية « كل ا هـ ب » فإننا لا نفهم من هذه القضية وجود أعضاء فى الفئة ا بالفعل ، إنما نفهم منها أنه لو كانت هناك ما صدقات فى الفئة ا فهى ستكون متصفة بالصفة ب . وهكذا فالقضية الكلية ، هى فى حقيقتها قضية شرطية ، أو هى قضية لزوم . وهذا هو السبب فى أن تعبيرنا عن القضية الكلية جاء على شكل لزوم بين الدالتين « د س » ، « و س » . أما القضية الوجودية فهى على خلاف ذلك ، إذ أنها تؤكد وجود عضو أو ما صدق واحد على الأقل من ما صدقات موضوع القضية ، وتصفه بأنه كذا وكذا . ومن ثم فهى لا تفترض إتصاف للفرد « س » بصفة ما فى حالة وجوده بالفعل ، بل تقرر وجوده بالفعل وتصفه . ومن ثم فالقضية الوجودية ليست قضية شرطية والسكى نوضح أن القضية الجزئية تقول شيئاً عن فرد واحد على الأقل ، موجود فى العالم ، فإننا نستخدم سوراً جزئياً Particular أو وجودياً Existential^(٢) ، ورمز له بالرمز :

(E س) .

ويقرأ هذا السور : « يوجد على الأقل فرد واحد هو س ، بحيث يكون ... » ، ويضاف هذا الرمز دائماً قبل كل قضية جزئية .

(١) ويستخدم رايشنباخ للصيغة التالية : (س) د (س) المرجع السابق ، ص ٩٣

(٢) ويسمى أحياناً بعامل الإجراء الوجودى Existential operator للرجع السابق ، صفحة ٨٩

فلو كانت لدينا القضية الجزئية التالية : « بعض للقامين فقراء » ، فإننا نبر
عنها رمزيا على النحو الآتي : -

$$(E\ S) (D\ S \cdot S)$$

وهي الصيغة العامة للقضية الجزئية للوجبة . وتقرأ هذه الصيغة الرمزية على
النحو الآتي : -

« يوجد على الأقل فرد واحد هو س ، بحيث يكون س مقامرا (أى : د س)
وفقيرا (أى : س س) . كما يمكن أن نكتب صيغة القضية الجزئية للوجبة بشكل
أكثر تبسيطا على النحو الآتي : -

$$(E\ S) (D\ S)$$

(ب) السالب :

لو كانت لدينا القضية الجزئية السالبة التالية : -

« بعض الأغنياء ليسوا أذكاء »

ولو رمزنا للعبارة « س غني » بالرمز « د س » ، ولالعبارة « س ذكي »
بالرمز « س س » لكان التعبير الرمزي عن العبارة « س ليس ذكيا » هو
« - س س » . ومن ثم فإننا باستخدام السور الوجودي ، نحصل على الصيغة التالية :

$$(E\ S) (D\ S \cdot - S)$$

وهي الصيغة العامة للقضية الجزئية السالبة . وتقرأ : « يوجد فرد واحد على
الأقل هو س ، بحيث يكون س غنيا (أى : د س) ، وغير ذكي (أى : - س س) .

هذا ويمكن كتابة صيغة القضية الجزئية السالبة بشكل أكثر تبسيطاً على النحو الآتي : -

$$(E \text{ س}) - د \text{ س} . (١)$$

ثالثاً : صور القضية المفردة : -

(١) الموجب :

والقضية المفردة عادة ما نتجربها عن جزئي مفرد واحد أو شخص معين يشار إليه باسم علم مثلاً أو باسم إشارة .

١ - فلو كانت لدينا القضية : -

« هذا الشخص من المقامرين وهو فقير »

أمكن التعبير عنها رمزيًا على النحو الآتي : -

$$(E \text{ ١}) (د \text{ س} . د \text{ س})$$

وهي الصيغة العامة للقضية المفردة الموجبة . وتقرأ : « بالنسبة لهذا المفرد س ، فإن س مقامر (أى . د س) ، س فقير (أى . د س) » .

٢ - ولو كانت لدينا القضية . «سقراط فيلسوف» ،

فإننا نرمز للعبارة « س هو سقراط » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س فيلسوف » بالرمز « د س » ، ومن ثم فإننا نحصل على الصيغة التالية .

$$(E \text{ ١}) (د \text{ س} . د \text{ س})$$

(١) ويستخدم رايشنباخ الصيغة التالية : $(E \text{ س}) (د \text{ س})$ ، أنظر :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P.93

ويمكننا في هذه الحالة أن نجعل الرمز « د س » ممثلاً لما تشير إليه كل من
الـداتين للمطوفتين ومن ثم يمكن التعبير عن القضية رمزيًا كما يلي : —

$$(\text{E} \text{ } ١) \text{ د س } . (١)$$

(ب) السالب :

ويمكن الرمز للقضية المفردة السالبة على النحو الآتي : —

$$(\text{E} \text{ } ١) (\text{د س} . \text{و س}) .$$

تسوير القضايا الحملية التقليدية :

هكذا يمكننا التعبير رمزيًا عن القضايا الأربع التقليدية على النحو الآتي : (٢)

١ — القضية الكلية الموجبة : A : كل ع هي ع :

$$(\text{س}) (\text{ع س} \text{ } \text{د ع س}) .$$

٢ — القضية الكلية السالبة : E : لا ع هي ع :

$$(\text{س}) (\text{ع س} \text{ } \text{د ع س}) .$$

٣ — القضية الجزئية الموجبة : I : بعض ع هي ع :

$$(\text{E} \text{ } \text{س}) (\text{ع س} . \text{و ع س}) .$$

٤ — القضية الجزئية السالبة : O : ليس بعض ع هي ع :

$$(\text{E} \text{ } \text{س}) (\text{ع س} . \text{و ع س}) .$$

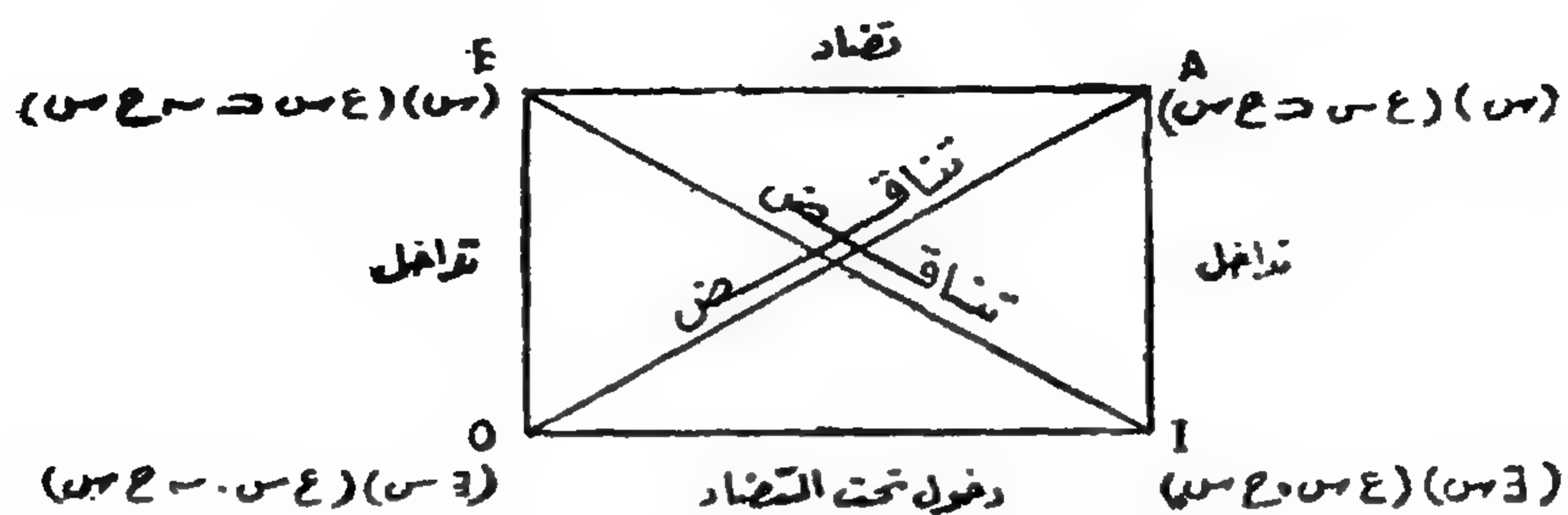
(١) Shipper, E. & Schuh, E. : A First Course in Modern

Logic P. 207

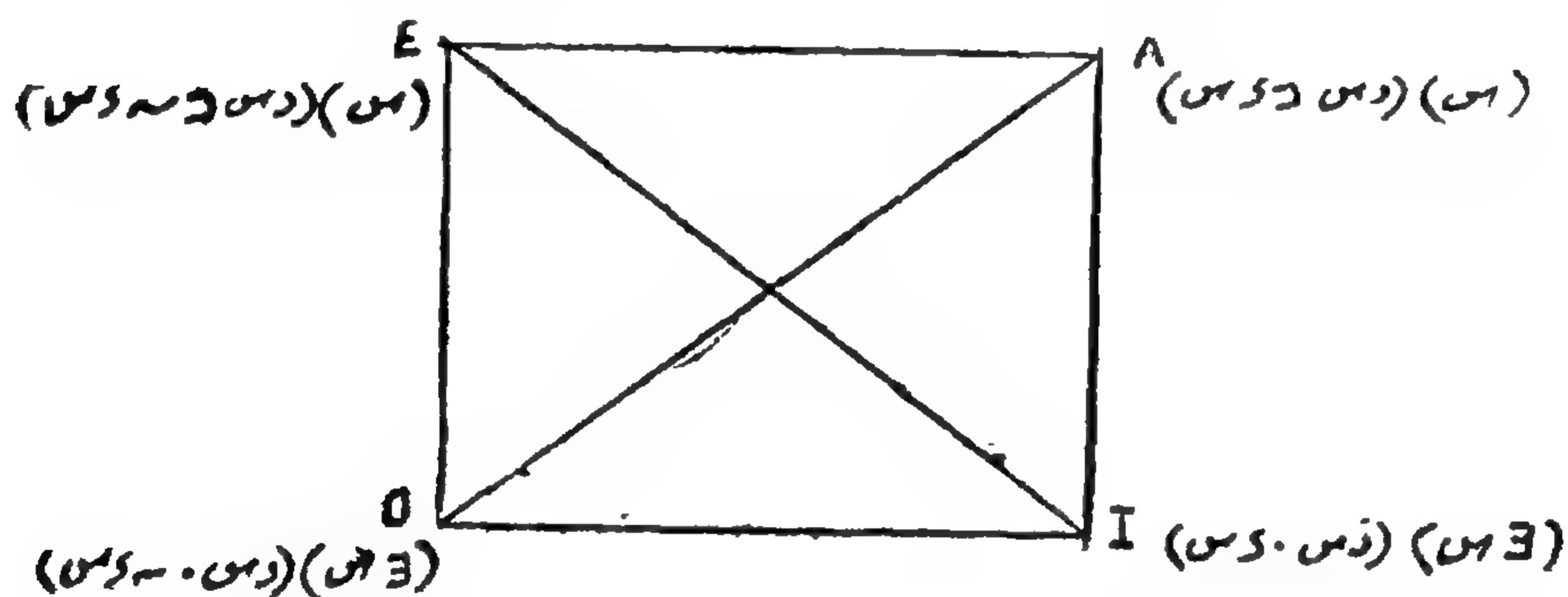
(٢) سوف نستخدم هنا الرمز «ع» للدلالة على الموضوع ، والرمز «ع» للدلالة
على المحمول في القضية الحملية .

(م ١٩ — أسس المنطق الرمزي)

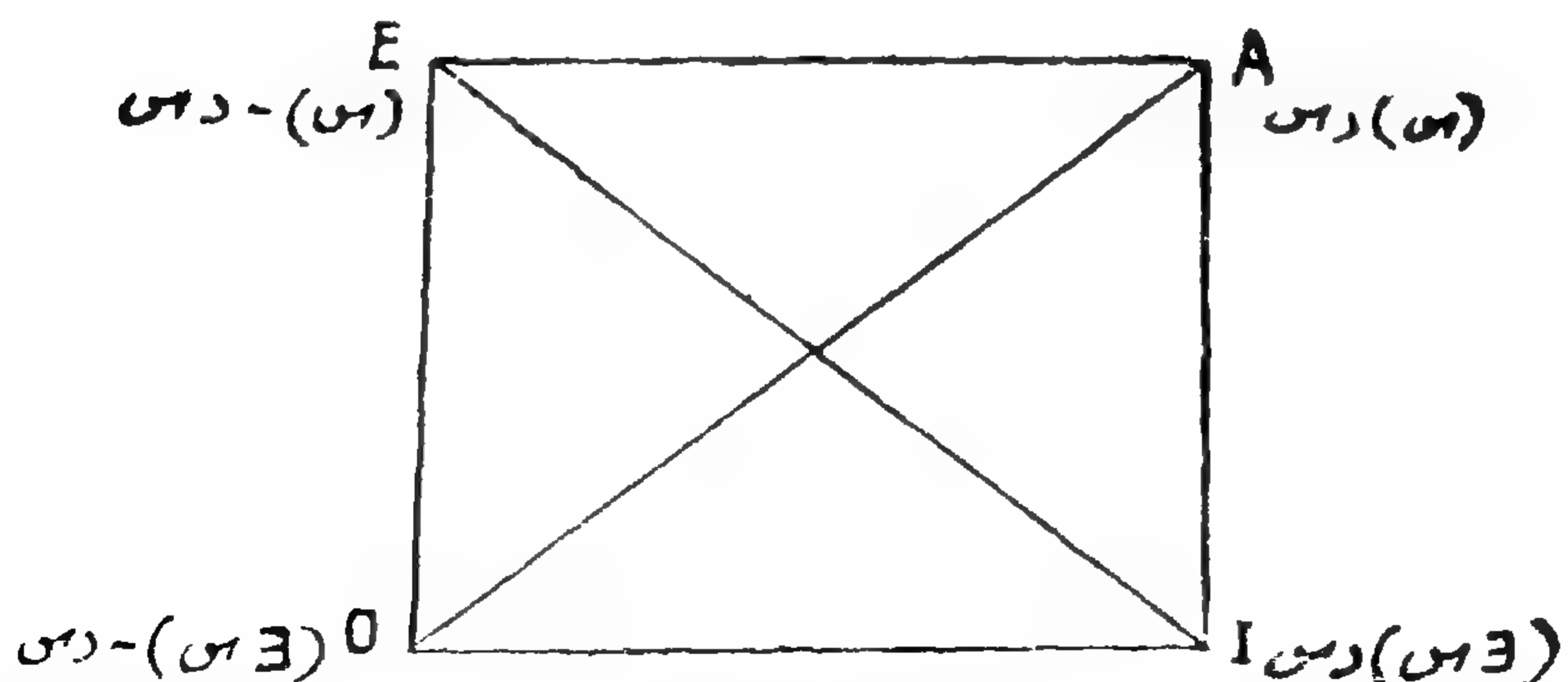
ومن ثم يمكننا أن نكتب للروح التقليدي لتقابل القضايا باستخدام الرموز
ع ، ح للدلالة على الموضوع والمحمول على النحو الآتي : -



أو أن نكتبه لو استخدمنا رموز الدالة والأسوار على النحو الآتي :-



أو نكتبه بطريقة مبسطة على النحو الآتي : - (١)



(١) ويرجع هذا الشكل إلى رايشنباخ ، مع شيء من التعديل في الرموز =

ومما هو جدير بالملاحظة هنا أن نقض محمول القضية الكلية السالبة ، يعبر عنه بنفس النحو رمزيا ، فإذا كانت (لا ع هي ع) يعبر عنها رمزيا بالصيغة :
 « (س) (ع س د - ع س) » ، فإن قضية تقيض محمولها ، وهي :
 (كل ع هي ع) ، يعبر عنها رمزيا بالصيغة : « (س) (ع س د - ع س) » .
 وهذا ما ينطبق كذلك في حالة القضية الجزئية السالبة ، لأن قضية تقيض محمولها
 وهي (بعض ع هي ع) ، ويرمز لها بالصيغة :

$$(E\ S) (E\ S \cdot S - E\ S) \quad (١)$$

هي الصيغة الرمزية الخاصة بالقضية الجزئية السالبة الأصلية .

مجال الأسوار :

لوقارنا بين الصيغتين التاليتين : -

$$١ - (S) (D S D S) .$$

$$٢ - (S) D S D S .$$

فإننا نلاحظ أن مجال السور في العبارة الأولى ، منصرف إلى دالة القضية كلها
 أى : (د س د س) أما مجال السور في العبارة الثانية ، فلا ينصرف إلا إلى
 الدالة « د س » فقط . ومن ثم يكون اللزوم في هذه الحالة الثانية لابين « د س »

= التي استخدمها ، فهو يستخدم الرموز التالية : (س) د (س) للتعبير عن A ،
 (س) د (س) للتعبير عن E ، (E س) د (س) للتعبير عن I ، (E س)
 د (س) للتعبير عن O . أنظر :

Reichenbach, H. : Elements of Symbolic Logic, P. 93

Mourant. J.A. : Formal Logic. P. 349.

وبين « و س » كما في العبارة الأولى ، بل بين « (س) د س » وبين « و س » ويمكن توضيح هذا الفارق بين العبارتين على النحو الآتي : -

أولا : لو قرأنا الصيغتين رقم ١ ، ٢ لعبرنا عن الأولى : « بالنسبة لأي س ، إذا كانت س هي د ، لسكانت س إذن هي و » ولعبرنا عن الثانية كما يلي : إذا كان ، بالنسبة لأي س ، س هي د ، كانت إذن س هي و .

ثانيا : كما أننا لو قارنا بين السور « (س) » وبين علامة نفي القضية « - » . لاحظنا أننا لو أردنا نفي القضية اللزومية التالية : « د ل » ، فأننا نكتبها : « - (د ل) » .

وهذا - كما عرفنا من قبل - يختلف عن القول : « - د ل » ، لأن النفي في الحالة الأولى ينصرف إلى قضية اللزوم (د ل) كلها ، في حين أن النفي في الصيغة الثانية لا ينصرف إلى قضية اللزوم كلها ، بل إلى اللقدم فيها فقط ، أي إلى « د » وحدها .

فاذا ما طبقنا ذلك بالنسبة للسور (س) فأننا نلاحظ أن مجاله يتحدد بالنسبة لأصغر وحدة رمزية تتلوه مباشرة ، سواء كانت هذه الوحدة الرمزية وحدة مركبة مثل (د س د و س) في الصيغة الأولى ، أو مثل « د س » في الصيغة الثانية .

الأسوار وتقييد للتغيرات : -

عادة ما يسمى للتغير الذي يتعلق بالسور - كليا كان السور أو وجوديا -- بالتغير للقييد Bound variable (١) (وهو الذي يقوم بدور مماثل للدور الذي

(١) ويسمى كذلك بالتغير الظاهري apparent على حد تعبير رسل في كتابه « أصول الرياضيات » ، - الجزء الأول ، صفحة ٥٤

يأبىه المتغير الخاص بالتكامل في الرياضيات (١)

وفي مقابل المتغير للمقيد ، يمكننا أن نسمى المتغيرات التي لا تتقيد بالأسوار ،
بالتغيرات الحرة Free variables (٢) . ولتوضيح ذلك نأخذ الصيغ التالية : —

١ — (س) (د س د و س)

نلاحظ في هذه الصيغة أن المتغير « س » قد ورد في دالة القضية : « د س د و س »
على أنه متغير مقيد بالأسوار ، أو على أنه داخل في نطاقه . لأننا نقرأ الصيغة
كلها على النحو الآتي : (بالنسبة لأي س ، إذا كانت « د س » ، كانت إذن « د و س ») .
ومن ثم فالمتغير « س » مقيد في هذه الحالة بالأسوار أو بعامل الاجراء
الكلى (س) (٣) .

وهكذا فإننا نعرف أن متغيرا ما ، هو متغير مقيد ، إذا كان داخلا في مجال
الأسوار الذي يستخدم هذا المتغير .

٢ — د س .

نلاحظ أن « س » الواردة في هذه الصيغة ، غير مرتبطة أو مقيدة بأسوار معين ،

(١) Hilbert, D-& Ackermann, W : Principles of Mathematical Logic, P. 59

(٢) ويسمى المتغير الحر كذلك بالمتغير الحقيقي real عند رسل في كتابه سالف
الذكر ، صفحة ٤٥ . إرجع كذلك إلى كتاب تارسكي « مقدمة للمنطق » الذي
أورد أمثلة متعددة للمتغيرات بنوعيتها في مجال الرياضيات خاصة .

Tarski, A. : Introduction to Logic, pp. 11-12.

(٣) Reichenbach, H : Elements of Symbolic Logic, P. 88.

وقد افهمى متغير حر (١). أما لو أدخلنا عليها السور السكلى (س) أو السور الوجودى (\exists س) ، لحصلنا على :
(أ) (س) د س .

وتقرأ : « بالنسبة لأي س ، تكون س متصفة بأنها و » .
أو ، (ب) (\exists س) و س .

وتقرأ : « توجد على الأقل س واحدة ، وهى متصفة بأنها د » .

ويصبح التغير « س » فى العبارتين الأخيرتين (أ ، ب) متغيراً مقيداً ، بالسور السكلى (س) فى العبارة رقم أ والسور الوجودى (\exists س) فى العبارة رقم ب .

٣ - (\exists س) (د س . و ص)

فى هذه الصيغة نلاحظ أن التغير « س » مقيد بالسور (\exists س) ، فى حين أن التغير « ص » غير مقيد بهذا السور . فى مثل هذه الحالة نقول أن التغير « ص » متغير حر ، لأنه قد ورد فى الصيغة السابقة بدون أن يكون داخل مجال السور (٢) .

٤ - (س) د س و ص .

فى هذه الصيغة نلاحظ أن التغير الواحد « س » يرد فى صيغة واحدة مرة على أنه متغير مقيد ، وأخرى على أنه متغير حر . فالتغير « س » فى « د س » مقيد بالسور (س) ومن ثم فهو متغير مقيد ، فى حين أن « س » الوارد فى « و س » لا يدخل فى نطاق السور (س) ، ومن ثم فهو متغير حر .

٥ - (س) (ص) (د س و ص)

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٢) Mourant, J. A. : Formal Logic. P. 352 .

ونلاحظ في هذه الصيغة وغيرها من الصيغ التي تحتوى على أكثر من متغير ، أن هذه المتغيرات إما أن تكون كلها مقيدة - كما في المثال السابق - أو أن يكون بعضها مقيداً في حين يكون بعضها الآخر حراً مثل الصيغة التالية :

$$(x \text{ م}) (x \text{ م}) (d \text{ م} \cdot s \text{ م} \cdot w \text{ م}) (1)$$

التي نلاحظ فيها أن المتغيرين s ، w مقيدان بالأسوار ، في حين أن المتغير « d » غير مقيد بالأسوار ، ومن ثم فهو متغير حر .

وعادة ما تسمى الصيغ التي تحتوى على متغير حر واحد على الأقل ، بالصيغ المفتوحة Open formulas ، كما نسمى الصيغ التي لا تتضمن أى متغير حر بالصيغ المغلقة Closed formulas .

تحويل دالات القضايا إلى قضايا :

الواقع أن القول بأن الأسوار تقيد المتغيرات ، معناه أنها تحول المتغيرات الحرة إلى متغيرات مقيدة . وبعبارة أخرى فإن دخول السور على دالة القضية ، يحول هذه الدالة - إذا كان ذلك كافياً لتقييد كل المتغيرات الحرة فيها - إلى صيغة قضية . وفيما يلي يمكننا أن نأخذ الشروط التي يجب أن تتحقق في صيغة القضية التي نحصل عليها من دالة للقضية :

١ - أن تكون ذات سور يحدد الحكم فيها .

٢ - أن توضع الرموز الخاصة بالقضية بعد السور داخل أقواس ، حتى لا يقتصر مجال السور على بعض رموز القضية دون بعضها الآخر .

٣ - أن يكون السور كافياً لتقييد جميع المتغيرات ، فلا يكون فيها أى متغير حر .

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

ومن ثم يمكننا أن نقارن بين صيغة القضية وبين دالة القضية على النحو الآتي : —
 إن صيغة القضية ، صيغة مغلقة ، بها كل المتغيرات مقيدة بالأسوار ، أما دالة
 القضية فقد تحتوي على متغيرات مقيدة أو لا تحتوي ، لكنها تحتوي أساساً على متغير
 واحد حر على الأقل . وعلى ذلك يكون في استطاعتنا تحويل دالة القضية إلى صيغة
 القضية كما يلي : —

(أ) إما بإدخال المتغيرات داخل الأقواس . (إذا كان السور مقيداً
 بالمتغيرات) .

فدالة القضية : (س) د س د و س ،

تصبح بهذا الأجراء صيغة القضية التالية الكلية : —

(س) (د س د و س) .

(ب) وإما بتوسيع السور بحيث يقيد المتغيرات الحرة (لو كانت علامة القضية
 داخل أقواس) .

فدالة القضية : (س) (د س د و س)

تتحول بهذا الإجراء إلى صيغة القضية التالية :

(س) (س) (د س د و س)

(ح) وإما بتوسيع السور بحيث يقيد المتغيرات الحرة ، مع إدخال التعبير الرمزي
 الخاص بالقضية داخل أقواس .

فدالة القضية : (س) د س د و س

تتحول إلى دالة القضية :

(س) (ص) د س د و ص

وذلك بتوسيع السور لكي يقيد المتغير « ص » . ثم تتحول إلى صيغة القضية :

(س) (ص) (د س د و ص)

وذلك بوضع رموز القضية داخل الأقواس حتى لا يكون السور مقصوراً على « د س » فقط دون « د ص » .

دالات القضايا من حيث الصدق والكذب :

عرفنا من قبل في المنطق التقليدي ، إن القضية هي القول الذي يمكن أن يكون صادقاً أو كاذباً . وعلى ذلك فـكل من القضيتين التاليتين : « كل إنسان فإن » ، « سقراط إنسان » يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة (وهما صادقتان بالفعل) ، ومن ثم فالصیغتان للعبرتان عن هاتين القضيتين ، على الترتيب : — (س) (د س د و ص) ، (١٥) (د س . و ص) يمكن أن تكون كل منهما صادقة أو كاذبة ، طالما أنهما لا تحتويان على متغيرات حرة . ومع ذلك فإن كلا منهما لا تصبح صادقة أو كاذبة فعلاً إلا إذا حددنا معنى كل حد من حدودها ، أي وضعنا فيها ثوابتاً بدلاً من المتغيرات .

أما دالة القضية فهي لا تكون صادقة أو كاذبة بمعنى الصدق أو الكذب الموجود في القضية وليكننا مع ذلك يمكن أن ننظر إليها (باعتبارها داخلية في المفهومين « صادق في جميع الأحوال » و « صادق في بعض الأحوال ») (١) . و « الصدق الدائم » صفة تنصف بها الدالات التي يمكن أن تتحول إلى قضايا كلية ، في حين

أن « الصدق في بعض الأحوال » صفة توصف بها الدالات التي يمكن أن تصبغ قضايا جزئية . وفي هذا الصدد يقول رسل : (وهكذا فإن دالة القضية « إذا كان س إنسانا ، كان س فانيا » صادقة دائما ، أو صادقة في جميع الحالات . أؤخذ هذه العبارة : « لا توجد عتقاء » ، فهي نقي قولنا « دالة القضية : « س ليست عتقاء » ، صادقة في جميع الحالات » (١) . من العبارة السابقة يمكننا أن تبين أن القضية (لا توجد عتقاء) مساوية لقولنا :

١ — بدالة القضية « س ليست عتقاء » .

٢ — وقولنا « صادقة في جميع الحالات » .

وبما أن دالة القضية تتحول إلى صيغة قضية لو أدخلنا عليها السور ، فكأن رسل في هذه الحالة يستخدم التعبير « صادقة دائما » بدلا من السور الذي يجب أن يضاف إلى الدالة ، لكي تتحول إلى صيغة قضية .

وبصفة عامة يمكن القول بأن رسل يستخدم العبارة « صادقة دائما » حين يريد التعبير عن سور القضية السككية ، الذي عبرنا عنه بالرمز (س) والذي يقرأ : « بالنسبة لأي س ... » فالقول بأن الدالة صادقة دائما تعني أنها صادقة « بالنسبة لأي س » أو « بالنسبة لأي حالة من الحالات التي تكون س » .

كما يستخدم رسل كذلك العبارة « صادقة أحيانا » حين يريد التعبير عن سور القضية الجزئية الذي عبرنا عنه بالرمز (س_ج) ، والذي يقرأ : يوجد على الأقل فرد واحد هو س بحيث ... » . فالقول بأن

الدالة صادقة أحياناً ، يعني أنها صادقة على الأقل في حالة واحدة . وقد عبر رسل عن هذا المعنى بقوله : (عندما نقول « يوجد ناس » فهذا يعني أن دالة القضية (س-إنسان) صادقة أحياناً . أى صادقة لبعض قيم س) (١) . ولقد ترتب على ذلك أن عبر رسل في كتابه « مقدمة للفلسفة الرياضية » عن القضايا الخمية التقليدية باستخدام الأسوار المعبرة عن الصدق ، « دائماً أو أحياناً » ، على النحو الآتي : —

١ - القضية الكلية الموجبة A : « كل ل و » تعني « د س تستلزم و س صادقة دائماً » .

٢ - القضية الجزئية الموجبة I : « بعض ل و » تعني « د س . و س صادقتان أحياناً » .

٣ - القضية الكلية السالبة E : « لا ل و » تعني « د س تستلزم لا- و س صادقة دائماً » .

٤ - القضية الجزئية السالبة O : « بعض ل ليست و » تعني « د س . لا- و س صادقتان أحياناً » . (٢)

أهم الاجراءات والعلاقات الخاصة بالحساب التحليلي لدالات القضايا :

الواقع أن أغلب الاجراءات والعلاقات وكذا القوانين التي سبق ذكرها فيما يتعلق بالحساب التحليلي للقضايا ، تكاد تنطبق في حالة الحساب التحليلي لدالات القضايا ، والقضايا ذات الأسوار التي توصل إليها باستخدام فكرة السور مع دالة

(١) للرجع السابق ، صفحة ٢٣١ .

(٢) للرجع السابق ، صفحة ٢٣٤ . وقد غيرنا في بعض الرموز التي استخدمناها رسل ، بما يتفق مع سياق الرموز التي نستخدمها في كتابنا الحالي .

القضية . لذا فإننا سنكتفي هنا باختبار بعض هذه الاجراءات ، والعلاقات لكي نبرزها في ضوء حساب دالات القضايا ، وما ينتج عن تسويرها من صيغ للقضايا . وذلك على النحو الآتي : -

(١) بعض الاجراءات الخاصة بحساب الدالات : -

أولا : إجراء النفي :

١ - لو كانت لدينا الدالة : « د س » .

وكانت « د » مثلا تعبر عن « إنسان » ، فإننا نقرأها : « س إنسان » .
فإذا ما أردنا أن تنفيها كي نقول « س ليس إنسانا » فإننا نكتبها كما يلي : -

« - د س » .

٢ - أما لو كانت لدينا صيغة القضية الكلية للوجبة :

(س) (د س د و س) ،

فإننا نستطيع أن نتناولها - في حالة النفي - من زاويتين ١ - من حيث مكوناتها، وهما « د س » ، « و س » . ٢ - أو من حيث هي صيغة لقضية واحدة .
ومن ثم فالنفي في هذه الحالة يمكن أن ينصرف إلى : -

(١) إحدى مكونات صيغة القضية مثل « و س » ، فنحصل على : -

(س) (د س د - و س)

(ب) كما يمكن أن ينصرف إلى القضية ككل ، ومن ثم فإننا نضع علامة النفي قبل السور على النحو الآتي : -

(س) (د س د و س) .

وتقرأ : (إن القول « بأنه بالنسبة لأي س ، لو كانت س هي د ، لزم عن ذلك أن تكون س هي و » هو قول كاذب) . وبما أن القضية التي نقينا سورها هي قضية كلية موجبة ، فنلاحظ أن نقيها ، سيكون مكافئاً لاثبات القضية المتناقضة معها ، أي القضية الجزئية السالبة . وسنعود إلى هذا بالتفصيل فيما بعد .

(ح) كما يمكن أن ينصرف إلى صيغة القضية من الراويين معاً ، فنطبق إجراء النفي على أحد مكونات الدالة ، وبالنسبة للمور في وقت واحد ، فتصبح القضية الأصلية في هذه الحالة على النحو الآتي : -

- (س) (د س د - و س) .

وتقرأ : (إن القول بأنه : « بالنسبة لأي س ، فإن د س لا تستلزم و س » هو قول كاذب) .

ثانياً : إجراء الجمع (أو الفصل للنطقي) :

(١) لو كانت « د س » تعبر مثلاً عن (هو مؤلف موسيقى) ، وكانت « و س » رمزاً للعبارة (هو كاتب) ، وأردنا أن نجمع العبارتين في عبارة واحدة مركبة ، فإننا نقول : (هو إما مؤلف موسيقى أو كاتب) . وهذا ما يعبر عنه رمزيًا على النحو الآتي : -

د س ٧ و س .

وبلاحظ في هذه الحالة أن الصيغة السابقة تعبر عن دالة قضية ذات متغير واحد .

(ب) فإذا ما قارنا هذه للصيغة ، بدالة القضية التالية : -

د س ٧ و س ،

فإننا نلاحظ أن هذه الصيغة الأخيرة هي دالة قضية ذات متغيرين هما « س » ،
« ص » . ومن ثم فهي يمكن أن تعبر مثلاً عن قول مثل : (إما أنه مؤلف موسيقى ،
أو أنها كاتبة)^(١) هذا ويمكن تحويل الدالتين القضويتين إلى قضيتين تأخذان
الصيغتين التاليتين : —

١ — (س) (د س ص) .

٢ — (س) (ص) (د س ص) .

ثالثاً : إجراء الضرب (أو العطف المنطقي) :

لو كانت « د س » رمز لدالة القضية « س فيلسوف » ، كانت « و س »
رمز لدالة القضية « س أديب » ، وأردنا أن نعطف الدالتين في دالة قضية
واحدة لقلنا :

« د س . و س »

رمزاً للقول « س فيلسوف وهو أديب » . ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضية ،
إلى صيغة قضية ، أضفنا إليها سوراً يقيد من المتغير الوارد فيها كما يلي : —

(E س) (د س . و س) .

ومما هو جدير بالذكر في هذا الصدد أننا غالباً ما نستخدم العطف في التعبير
الرمزي عن القضية الجزئية أو الوجودية للوجبة ، كما في المثال السابق أو السالبة
كما في الصيغة التالية : —

(E س) (د س . - و س) .

ب — بعض الملاقات الخاصة بحساب الدالات :

أولا : علاقة اللزوم

لو كانت « د س » ترمز للتعبير « س انسان » وكانت « و س » ترمز للتعبير « س فإن » ، وأردنا أن نعبر عن لزوم دالة القضية « س فإن » عن دالة القضية « س انسان » ، فإننا نكتب ذلك رمزيا كما يلي : —

د س د و س .

ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضيوية إلى صيغة قضية ، فإننا نضيف إليها سوراً يقيد من التعبير الوارد فيها ، كما يلي : —

(س) (د س د و س)

ومما هو جدير بالذكر أننا غالباً ما نستعمل اللزوم في التعبير الرمزي عن القضايا الكلية — للوجبة ، كما في المثال السابق ، أو السالبة ، كما يلي : —

(س) (د س د و س)

ثانيا : علاقة التنافر :

لو كانت « د س » ترمز للتعبير « س يأكل » ، وكانت « و س » ترمز للتعبير « س يتكلم » وأردنا أن نعبر عن التنافر بين هاتين الدالتين ، فإننا نكتب : —

— (د س و س)

وتقرأ : إنه من المستحيل أن يأكل س ، وأن يتكلم في وقت واحد .

ولو أردنا تحويل هذه الدالة القضيوية ، إلى صيغة قضية ، فإننا نضيف إليها السور الكلي فنحصل على صيغة التنافر التالية : —

(س) - (د س . و س) .

وبلاحظ أننا نستطيع التعبير عن هذه الصيغة ، بواسطة القضايا اللزومية
المكافئة لها : -

١- (س) (د س - و س)

٢- أو : (س) (و س - د س) .

ثالثا : علاقة التقابل بين القضايا ذات الأسوار

(١) التقابل بالتناقض :

١- لو أخذنا الفرض العلمى الذى كان سائدا حتى القرن السادس عشر ،
والقائل بأن (جميع الأجسام الثقيلة تسقط بسرعات تتناسب مع أوزانها ، وقارناه
بالنتيجة التجريبية التى إنتهى إليها جاليليو وهى أن (بعض الأجسام الثقيلة لا تسقط
بسرعة تتفق مع وزنها) . فأننا نلاحظ تناقض هذه النتيجة مع النظرية السابقة . فإذا
مارمنا للنظرية القديمة باستخدام « د س » بدلا من « س جسم ثقيل » ، « و س »
بدلا من « س يسقط بسرعة تتناسب مع وزنه » ، فأننا نحصل على الصيغة التالية :-

(س) (د س - و س) .

وبالمثل يمكننا أن نعبر عن نتيجة جاليليو بالصيغة التالية :-

(E س) (د س . و س)

وبما أن القضيتين الأصليتين متناقضتان (كلية موجبة ، وجزئية سالبة) فإن
الصيغتين الرمزيتين المعبرتين عنهما تتناقضان كذلك . ومن ثم فإن :-

(س) (د س - و س)

تتناقض مع : $(E \text{ س}) (دس \cdot \sim و س)$.

وبما أن حكم التناقض يتلخص في أن صدق إحدى القضيتين المتناقضتين يستلزم كذب الأخرى وبالعكس ، فإننا نحصل على : —

١ — $(س) (دس \cdot و س) : \sim (E \text{ س}) (دس \cdot \sim و س)$.

٢ — $(\sim س) (دس \cdot و س) : (E \text{ س}) (دس \cdot \sim و س)$.

٣ — $(E \text{ س}) (دس \cdot \sim و س) : \sim (س) (دس \cdot و س)$.

٤ — $(\sim E \text{ س}) (دس \cdot \sim و س) : (س) (دس \cdot و س)$.

٢ — وهذا ما ينطبق كذلك في حالة التناقض بين القضيتين الكلية السالبة والجزئية الموجبة . |

وبما أن صيغة القضية الكلية السالبة تكتب : $(س) (دس \cdot \sim و س)$

وبما أن صيغة القضية الجزئية الموجبة تكتب : $(E \text{ س}) (دس \cdot و س)$ فإننا نحصل على : —

١ — $(س) (دس \cdot \sim و س) : \sim (E \text{ س}) (دس \cdot و س)$.

٢ — $(\sim س) (دس \cdot و س) : (E \text{ س}) (دس \cdot و س)$.

٣ — $(E \text{ س}) (دس \cdot و س) : \sim (س) (دس \cdot و س)$.

٤ — $(\sim E \text{ س}) (دس \cdot و س) : (س) (دس \cdot و س)$.

٣ — أما التناقض في حالة القضية المفردة : $(E \text{ س}) (دس \cdot و س)$ فيكون بينها

وبين القضية التي تنفيها وهي : —

$(\sim E \text{ س}) (دس \cdot و س)$

(م ٢٠ — المنطق الرمزي)

وطى ذلك فإتينا نحصل على :-

$$١ - (E١) دس : د : (E١) - دس .$$

$$٢ - (E١) دس : د : (E١) - دس .$$

(ب) التقابل بالتضاد :

ويكون بين القضيتين الكلّيتين المختلفتين في الكيف، أى بين الصيغتين :-

$$(س) (دس د و س)$$

$$و (س) (دس د - و س)$$

وبما أن حكم التضاد ، هو أن القضيتين المضاويتين لاتصدقان معاً ، فإتينا نحصل على :-

$$١ - (س) (دس د و س) : د : (س) (دس د - و س) .$$

$$٢ - (س) (دس د - و س) : د : (س) (دس د و س) .$$

(ج) التقابل بالدخول تحت التضاد :

ويكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين في الكيف ، أى بين الصيغتين :-

$$(Eس) (دس . و س)$$

$$و (Eس) (دس . و س)$$

وبما أن القضيتين الداخلتين تحت التضاد لاتكذبان معاً ، فإتينا نحصل على :-

$$١ - (Eس) (دس . و س) : د : (Eس) (دس . و س) .$$

$$٢ - (Eس) (دس . و س) : د : (Eس) (دس . و س) .$$

(د) التقابل بالتداخل :

ويكون بين القضيتين المختلفتين كما للتفتين كيما ، أى بين الصيغتين :-

(س) (دس دس دس)

و (Hس) (دس دس دس)

وكذلك بين الصيغتين :-

(س) (دس دس دس)

و (Hس) (دس دس دس)

وبما أن حكم التداخل يتلخص في صدق القضية الجزئية ، بناء على صدق القضية الكلية ، وكذب القضية الكلية بناء على كذب القضية الجزئية ، فإننا نحصل على :-

١ - (س) (دس دس دس) : (Hس) (دس دس دس) .

٢ - (س) (دس دس دس) : (Hس) (دس دس دس) .

٣ - (Hس) (دس دس دس) : (س) (دس دس دس) .

٤ - (Hس) (دس دس دس) : (س) (دس دس دس) .

وهناك ملحوظة هامة يجب أن لا تغفلها في حالة الاستدلال على الصدق فيما يتعلق بالتداخل أى في الحالتين رقم ١ و ٢ السابقتين . وهى أن القضية الكلية (موجبة أو سالبة) لا تدل على وجود ما صدقات بالفعل ، طالما أن السور (س) يعنى « بالنسبة لـ س » لكنه لا يعنى ما إذا كانت س موجودة بالفعل أم لا . فى حين أن السور الجزئى (Hس) يعنى « وجود فرد واحد على الأقل هو س » . فكيف نستنتج صدق قضية تتكلم عن أشياء موجودة بالفعل ، من صدق قضية لا تتكلم عن وجود فعلى لهذه الأشياء ؟ وقد عبر رايشباخ عن هذا المعنى بقوله . (قد يكون من الغريب هنا أن نستنتج قضية وجودية من قضية كلية ، على الرغم من أن كلمة « كل » لا تتضمن أية دلالة على الوجود أو الإشارة

إليه ، (١) . وعلى ذلك فإننا لا نستطيع استنتاج القضيتين الوجوديتين أو الاستدلال على صدقهما ، من القضيتين الكليتين المتداخلتين معهما ، واللتين نفترض صدقهما ، ما لم نفترض أن الموضوع في القضية الكلية يشير إلى وجود أفراد بالفعل ، أى ما لم ننص صراحة على أن :

$$» (E \text{ م}) (D \text{ م}) «$$

وعلى ذلك فإننا نكتب القضيتين الكليتين في حالة الصدق في التداخل على النحو الآتى : —

— القضية الكلية للوجبة : (م) [(D م و م) . (E م) (D م)] .

— القضية الكلية السالبة : (م) [(D م - و م) . (E م) (D م)] .

وعلى ذلك فإن علينا أن نضع الصيغتين التاليتين بدلا من عبارتي اللزوم رقم ١ ، ٢ السابقتين وذلك كما يلي : —

$$١ - (م) [(D م و م) . (E م) (D م)] : D : (E م) (D م و م) .$$

$$٢ - (م) [(D م - و م) . (E م) (D م)] : D : (E م) (D م و م) .$$

رابعا : علاقة التكافؤ بين القضايا ذات الأصوار :

وتنشأ بين القضايا ذات الأصوار التي تكون كمية الصدق فيها واحدة : —

(١) فمن أحكام التقابل السابقة مثلاً يمكننا أن نلاحظ في حالة التناقض أن صدق أو كذب إحدى القضيتين يستلزم كذب أو صدق الأخرى ، على الترتيب . وبما أن اللزوم المتبادل بين القضايا هو التكافؤ Equivalence كما ذكرنا ذلك في حساب القضايا من قبل بالتفصيل ، فإننا نستطيع الحصول على الصيغ للتكافؤ التالية : —

$$١ - A \equiv E ، \text{ أى أن : } -$$

$$(S) (D S \supset U S) \equiv (S) (D S \supset \neg U S) .$$

$$٢ - A \equiv O ، \text{ أى أن : } -$$

$$(S) (D S \supset U S) \equiv (S) (E S) (D S \supset \neg U S) .$$

$$٣ - E \equiv A ، \text{ أى أن : } -$$

$$(S) (D S \supset \neg U S) \equiv (S) (S) (D S \supset U S) .$$

$$٤ - E \equiv I ، \text{ أى أن : } -$$

$$(S) (D S \supset \neg U S) \equiv (S) (E S) (D S \supset U S) .$$

$$٥ - I \equiv E ، \text{ أى أن : } -$$

$$(E S) (D S \supset U S) \equiv (S) (D S \supset \neg U S) .$$

$$٦ - O \equiv A ، \text{ أى أن : } -$$

$$(E S) (D S \supset \neg U S) \equiv (S) (D S \supset U S) .$$

(ب) إننا نستطيع كما ذكرنا من قبل في حساب القضايا أن نوجد تكافؤاً بين عدد من دالات القضايا المختلفة ، ومن ثم بين صيغ القضايا الخاصة بها بعد التصوير . فكلما اتينا نكتب :

$$(v \supset l) \equiv (l \supset v)$$

في حساب القضايا ، فكذا تكون الصيغة التالية في حساب الدالات صحيحة : —

$$(d \supset w \supset s) \equiv (s \supset w \supset d)$$

ومن ثم فإننا نحصل على : —

$$١ - (s) (d \supset w \supset s) \equiv (s) (s \supset w \supset d)$$

وكما أن هناك تكافؤاً بين قضيتي اللزوم والفصل التاليتين : —

$$(l \supset v) \equiv (l \supset v)$$

فكذا تكون : —

$$(d \supset w \supset s) \equiv (s \supset w \supset d)$$

ومن ثم فإننا نحصل على : —

$$٢ - (s) (d \supset w \supset s) \equiv (s) (s \supset w \supset d)$$

ولنفرض أن لدينا صيغة القضية الفصلية التالية : —

$$(s) (d \supset w \supset s)$$

فإننا نستطيع التعبير عنها بأحد التعبيرين اللزوميين المكافئين التاليين : —

$$١ - (s) (s \supset w \supset d)$$

$$ب - أو : (s) (s \supset w \supset d)$$

وكما أن هناك تكافؤاً بين قضيتي اللزوم والتناظر التاليتين :

$$(v \supset l) \equiv (l \supset v)$$

فكذلك تكون :-

$$(دس د و س) \equiv (دس د و س) .$$

ومن ثم فإننا نحصل على :-

$$٣ - (س) (دس د و س) \equiv (س) (دس د و س) .$$

وانفرض أن لدينا صيغة التناظر الآتية :

$$(س) - (دس د و س)$$

فإننا نستطيع التعبير عنها بأحد التعبيرين اللزوميين للكافئين التاليين :-

$$١ - (س) (دس د و س)$$

$$ب - أو : (س) (دس د و س)$$

وكما ذكرنا من قبل قائمة للمتكافئات في حساب القضايا هي :-

$$(د د و س) \equiv (د د و س) \equiv (د د و س) \equiv (د د و س) .$$

فإننا نستطيع كذلك أن نكتب قائمة للمتكافئات الخاصة بدالات القضايا ،

كما يلي . -

$$(دس د و س) \equiv (دس د و س) \equiv (دس د و س) \equiv (دس د و س) .$$

$$(دس د و س) .$$

ومن ثم فإننا نكتب في حالة القضية الكلية الموجبة ، قائمة للمتكافئات التالية :-

$$(س) (دس د و س) \equiv (س) (دس د و س) \equiv (س) (دس د و س) .$$

$$(دس د و س) \equiv (دس د و س) \equiv (دس د و س) .$$

كما نكتب في حالة القضية الكلية السالبة قائمة التكافئات التالية :-

$$(س) (د س - د س) \equiv (س) (س) \equiv (س) (د س - د س) \equiv (س) (س) \\ (- د س - د س) \equiv (س) (- د س - د س) \equiv (١) .$$

وكما استطعنا الإفادة من قائمة التكافئات في الاستدلالات المختلفة الخاصة بحساب القضايا فإننا نحتطع كذلك الإفادة من قوائم التكافئات الخاصة بالدالات ، وصيغ القضايا التي نحصل عليها بتسوير الدالات ، في الحساب التحليلي لدالات القضايا . وسيتضح هذا حين نعرض للاستدلالات الخاصة بدالات القضايا .

ج - بعض القوانين الخاصة بدالات القضايا والقضايا للسورة :

١ - قوانين ترتيب الأسوار :-

(١) إن الأسوار التي تكون من نفس النوع (أى للمبرة عن كم واحد ، كلئ أو وجودئ) يمكن عكس ترتيبها بحيث لا يؤثر هذا في صدق القضية . وطئ ذلك فإننا نحصل طئ :-

$$١ - (س) (س) (د س ، س) \equiv (س) (س) (د س ، س) . \\ ٢ - (س) (س) (د س ، س) \equiv (س) (س) (د س ، س) (٢) .$$

(١) وقد عبر رایشباخ في كتابه سالف الذکر « صفحة ٩٤ » عن قائمة قریة من هذه القائمة طئ :-

$$\overline{(س) (س) (د س) . س} \equiv \overline{(س) (س) (د س) . س} \equiv \overline{(س) (س) (د س) . س} \\ \overline{٧ (س) (س) (د س) . س} \equiv \overline{٧ (س) (س) (د س) . س} .$$

(٢) المرجع السابق ، صفحة ١٠١

ولتوضيح ذلك نقول : لو كانت s ، من أى عددين ، وكانت « د » تعنى « أصغر من » ، لكانت « د (s ، s) » تعنى أن « s أصغر من s » ومن ثم فأننا فى صيغة التكافؤ الأولى نقول فى الشرط الأيمن منها « بالنسبة لأى عدد هو s ، وبالنسبة لأى عدد هو s ، يكون s أصغر من s . وفى صيغة التكافؤ الثانية نقول : بالنسبة لأى عدد هو s ، وبالنسبة لأى عدد هو s ، يكون s أصغر من s . وهكذا فسواء بدأنا بالسور الكلى (s) أو السور الكلى (s) فأننا ننتهى إلى نتيجة واحدة ، وهذا ما ينطبق كذلك على عبارة التكافؤ الثانية ، فسواء بدأنا فيها بالقول بأنه يوجد عدد واحد على الأقل هو s ، ويوجد عدد واحد على الأقل هو s ، أو بالعكس ، فقلنا بوجود عدد واحد على الأقل هو s ، وبوجود عدد واحد على الأقل هو s فالنتيجة واحدة فى كلتا الحالتين وهى أن « د (s ، s) » أى أن « s أصغر من s » .

ب - أما لو كان السوران مختلفين كـ a ، فعالمياً ما يؤدى عكس ترتيبهما إلى نتيجة مختلفة ، ومن ثم فلا يكون هناك تكافؤ بين العبارتين . ولناخذ لذلك مثلاً : إذا كانت لدينا العبارتان التاليتان :-

$$١ - (s) (E s) [(d s \leq d s) \cdot (s, s)]$$

$$٢ - (E s) (s) [(d s \leq d s) \cdot (s, s)] \quad (١)$$

وفرضنا أن « د س » تعنى أن « s عدد طبيعى » ، كانت العبارة الأولى صادقة لأنها تعنى : « بالنسبة لأى عدد طبيعى ، يوجد عدد طبيعى أكبر منه » ، ومع ذلك

فان العبارة الثانية لا تكون صادقة ، طالما أنها قد تعنى وجود عدد طيعى واحد هو أكبر من جميع الأعداد . وإن كنا نستطيع الحصول على تفسير صحيح صادق للعبارة الثانية لو وضعنا - بدلا من « د (س ، س) » التعبير « س ليس أصغر من س » . ومن ثم تعنى العبارة وجود عدد هو س ، بحيث تكون جميع الأعداد ليست أصغر من س . أو بعبارة أخرى ، يوجد عدد واحد هو س ، بحيث تكون س أصغر من كل الأعداد الأخرى . ومثل هذا العدد موجود فعلا ، فهو الصفر .

من مثل هذه الاعتبارات السابقة ، فالتا نتوصل إلى القواعد التالية لترتيب عوامل الإجراء أو الأسوار وتنظيمها . ويمكن التعبير عن هذه القواعد بالصيغ التالية . —

$$١ - (س) (ص) د (س ، ص) \equiv (س) (ص) د (س ، ص) .$$

$$٢ - (E) (S) (E) (S) د (S ، S) \equiv (E) (S) (E) (S) د (S ، S) .$$

$$٣ - (E) (S) (S) د (S ، S) : \equiv : (S) (E) (S) د (S ، S) (١)$$

٢ - قانون التطبيق . Law of Application

ويجوز عن مبدأ التداخل ، ويتلخص في القول بأن ما يصدق بصفة عامة بالنسبة لكل س من حيث اتفاقية مع شروط معينة ، يصدق أيضاً بالنسبة لفرد ما على الأقل هو س ، يكون مستوفياً لهذه الشروط نفسها . ويمكن صياغة هذا القانون صياغة رمزية كما يلي . —

$$[(س) (د س \equiv د س) \cdot (E) (S) د (S ، S) : \equiv : (E) (S) د (S ، S) .$$

٣ - قانون إختصار الأسوار .

لو كانت لدينا عبارة رمزية تحتوي على أكثر من سور (من نوع واحد ، كلى أو وجودى) أمكننا إختصار الأسوار ، بحيث نكتب السور مرة واحدة للعبارة كلها ، طالما كانت التعبيرات الواردة فى العبارة ، كلها مقيدة بنفس السور . وهذا ما يتضح مثلا من الصيغة التالية :-

(س) د س ٧ (س) و س

التي يمكن كتابتها على النحو الآتى :-

(س) (د س ٧ و س) (١)

الاستدلال الخاص بدالات القضايا والقضايا

ذات الأسوار

يلاحظ من قانون التطبيق السابق ذكره ، أنه قائم على أساس اللزوم ، ومن ثم فهو يعبر عن استدلال صحيح . كما يلاحظ كذلك من جميع الصيغ المتكافئة ، أنها تعبر عن استدلال صحيح ، طالما أن كل تكافؤ يعبر عن لزوم متبادل . وسنعرض فيما يلي لبعض أنواع الاستدلالات الخاصة بدالات القضايا والقضايا ذات الأسوار . مع ملاحظة أننا سوف نعتمد في هذه الاستدلالات على نفس القوانين والقواعد التي سبق اتباعها في الاستدلالات الخاصة بالقضايا ، فضلا عن بعض القوانين الخاصة بهذا المجال ، وسنعود إلى ذكرها في نهاية هذا الفصل :-

أولا . استدلالات قائمة على اللزوم .

١ - استدلالات صحيحة .

لو كانت لدينا الصيغة التالية :-

$$[(S) (D \supset W) \cdot (E \supset S) - W] : (E \supset S) - D .$$

لعرفنا أنها صيغة تعبر عن استدلال صحيح ، وذلك على أساس أنها تعتمد على قاعدة أشبه بقاعدة النفي أو الرفع *modus tollens* بين القضايا . ويمكن توضيح هذا الاستدلال لو وضعنا بدلا من دالة القضية : $(D \supset W)$ ، دالة قضية اللزوم العكسي لها ، أي : $(-W \supset -D)$ ، فتصبح صيغة الاستدلال على النحو الآتي :-

$$[(S) (-W \supset -D) \cdot (E \supset S) - W] : (E \supset S) - D .$$

والواقع أن مثل هذه الصيغ الاستدلالية ، وكذا تطبيقاتها للوسعة على النحو الذى سنذكره فيما بعد - هي صيغ أساسية لتطبيق ما هو كلى وعام بالنسبة لما هو جزئى أو خاص . أى أنها صيغ قائمة على ما أسميناه من قبل بعبء التطبيق ، وهو البدء الأساسى فى هذا الصدد .

ب - استدلالات غير صحيحة :

١ - لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا بحث الإنسان جيداً ، وجد المكان المطلوب . وبما أن شخصاً قد وجده ، إذن فهو قد بحث جيداً) ، وأردنا أن نعرف ما إذا كان صحيحاً أم لا . فإننا نرمز للعبارة « س شخص يبحث جيداً » بالرمز « هـ س » ، وللعبارة « س شخص وجد المكان المطلوب بالرمز « و س » ، ومن ثم نحصل على : -

$$[(س) (هـ س) (و س) \cdot (هـ س) (و س)] : \vdash (هـ س) (و س) \cdot$$

فإذا ما وضعنا الرموز العامة للدالات بدلا من الرموز السابقة ، واستخدمنا « د س » بدلا من « هـ س » ، وكذا « و س » بدلا من « و س » حصلنا على :-

$$[(س) (د س) (و س) \cdot (هـ س) (و س)] : \vdash (هـ س) (و س) \cdot$$

وهذا استدلال غير صحيح لأنه ليس تطبيقاً لكلى بالنسبة لحالة خاصة ، إذ أن وجود « س » الذى تصدق بالنسبة له « و س » - ليس على صييل اليقين - حالة خاصة من حالات « س » التى تصدق بالنسبة لها « د س » (ومن ثم « و س ») .

هذا ويمكننا ملاحظة التشابه بين هذه الصيغة ، والصيغة الخاطئة التى ذكرنا من

قبل - فى حساب القضايا - إنها قائمة على إثبات التالى .

٢ - لو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا كان الإنسان فى مكان مختلف عن

مكان وقوع الجريمة ، فهو لن يكون مذنباً . وهذا الإنسان كان فى مكان الجريمة ،

وطى ذلك فلا بد وأن يكون مذبناً) ، وأردنا معرفة صحته فإننا نقوم باستخدام الرمز على النحو الآتى : -

أن رمز العبارة « س إنسان فى مكان يختلف عن مكان وقوع الجريمة » بالرمز « د س » ، والعبارة « ليس مذبناً » بالرمز « و س » فإننا نحصل على : -

$$[(س) (د س \supset و س) (و س) (و س) : (و س) (و س)]$$

وهو استدلال غير قائم على أساس قانون التطبيق ، لأن « س » للوجود بالفعل ، والذي تصدق بالنسبة له « د س » ، هو - يقيناً - ليس حالة خاصة من حالات « س » التى تصدق بالنسبة لها « د س » (ومن ثم « و س ») . وطى ذلك بالاستدلال غير صحيح .

هذا ويمكننا أن نبين أن هذه الصيغة شبيهة بالاستدلالات غير الصحيحة فى حساب للقضايا القائمة على نفي للمقدم . وطى ذلك فإننا ننتهى إلى القول بأن أى استدلال يأخذ هذه الصورة يكون إستدلالاً غير صحيح .

٣ - هذا وتوجد فى الاستدلالات الخاصة بالقضايا ذات الأسوار - أغلوطة تسمى عادة بأغلوطة التصوير الخاطي^(١) ، وتتلخص فى عدم تطبيق ما هو عام بالنسبة لما هو خاص ، بل تقوم على تطبيق ما هو خاص بالنسبة لما هو خاص أيضاً . ومن ثم فهى لا تعتمد على مبدأ التطبيق بالمعنى الصحيح سالف الذكر . ولتوضيح ذلك نذكر أننا أحياناً ما نقصر ونخطئ حين نفترض أن ما ينطبق على فرد معين ، ينطبق كذلك على فرد آخر . فنحن نفترض مثلاً أنه طالما ينجح محمد حين يستذكر دروسه ، فإن علياً سوف ينجح كذلك إذا استذكر دروسه . ونعبر عن ذلك بالصيغة الرمزية التالية : -

$$[(E1) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

فمثل هذا الاستدلال ، استدلال غير صحيح ، طالما أن المقدمة الأولى الزومية ليست مسورة تسوياً كلياً . وهذا ما ينطبق كذلك بالنسبة للاستدلالات غير الصحيحة التي تكون فيها المقدمة الأولى الزومية مسورة تسوياً جزئياً وجودياً مثل :-

$$1 - [(E1) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

$$2 - [(E1) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

ونلاحظ أن ما سبق قلناه إلى أن لدينا على الأقل صيغتين من الصيغ الشائعة للاستدلالات الصحيحة ، وهما :-

$$1 - [(S) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

$$2 - [(S) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

وإن لدينا على الأقل ثلاث صور شائعة لاستدلالات غير صحيحة ، هي :-

$$1 - [(S) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

$$2 - [(S) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

$$3 - [(E1) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

ثانياً : استدلالات لزومية موسعة تتضمن قضايا وجودية :

١ - استدلالات صحيحة .

١ - لو كانت لدينا الصيغة الاستدلالية التالية :-

$$[(S) (D1 \supset E1) \cdot (E2) (D2 \supset E2) : \supset (E1 \supset E2)]$$

فستبين أنها تعبر عن استدلال صحيح إذ هي في حقيقتها مجرد توسيع للاستدلال الصحيح السابق ذكره :

$$[(س) (دس د و س) \cdot (س) (دس)] : د : (س) (س و س) \cdot$$

وهكذا فنحن لم نضف إلى الصيغة السابقة إلا القول بأن «س» للوجود ، والتي تصدق بالنسبة لها «دس» ، ومن ثم «و س» ، يمكن تعريفها أو تحديدها كذلك بدالة ثالثة هي «س س» .

الآن يلاحظ أن القضية الكلية « (س) (دس د و س) » يجب أن تنطبق على كل مثال أو حالة موجودة ، تكون بالنسبة لها «دس» صادقة ، بغض النظر عن عدد الدالات الإضافية التي تتعلق بها . وبما أن هذا التطبيق صحيح بالنسبة لـ «س» المحددة بواسطة دالة واحدة ، فيجب أن يكون صحيحاً كذلك بالنسبة إلى «س» التي تعدد بدالتيها أو أكثر في عبارة عطفية واحدة مثل «س س . دس» . وتكون صيغتها مماثلة أو مشابهة لتلك الصيغة للتطورة للقضايا ، والتي سبق ذكرها : —

$$[(د د ل) (م \cdot م)] : د : م \cdot ل \cdot$$

هذا ويلاحظ أننا نستطيع كتابة الدالة الإضافية المتعلقة بالحالة الخاصة — التي رمزنا لها هنا بالرمز «س س» — إما قبل أو بعد الدالة الأولى «دس» . أما فيما يتعلق بقانون التبادل ، فإننا نلاحظ أن ترتيب الدالات في قضية العطف لا يؤدي إلى أي اختلاف . أي أن للعنى واحد سواء كتبنا «س س . دس» أو «دس . س س» في المقدمة ، أو كتبنا «س س . و س» أو «و س . س س» في النتيجة .

٢ — ولو كان لدينا الاستدلال التالى : (إذا كانت أية قضية هي إما صادقة أو كاذبة . وإذا كان هذا السؤال مما لا يمكن أن يكون صادقا أو كاذبا . فهو إذن ليس بالقضية) ، وأردنا أن نتبين ما إذا كان الاستدلال صحيحا أم لا ، فإننا نرمز للعبارة « س قضية » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س يمكن أن تصدق أو تكذب » بالرمز « و س » ، وللعبارة « س سؤال » بالرمز « ه س » ، فإننا نحصل على :-

$$[(س) (د س و س) (١ ه) (ه س . و س)] : د : \\ (١ ه) (ه س . د س) .$$

وهي صيغة معبرة عن استدلال صحيح ويتضح ذلك بصفه خاصة حين نضع بدلا من :

(د س و س) دالة قضية الازوم العكس لها وهي : (- و س د - د س) ، وذلك كما يلي :

$$[(س) (- و س د - د س) (١ ه) (ه س . - و س)] : د : \\ (١ ه) (ه س . د س) .$$

(ب) استدلالات صحيحة :

إن ما سبق ذكره عن الاستدلالات غير الصحيحة آتفا ، يصدق كذلك عنها هنا ، فالاستدلالات الصحيحة :

- ١ — لا تقوم على إثبات التالى .
- ٢ — ولا تقوم على نفى اللقدم .
- ٣ — ويجب أن تكون اللقدمة اللزومية فيها كلية حتى تنطبق على الحالة الخاصة أو الجزئية فى اللقدمة الأخرى .

وعلى ذلك فكل استدلال لا تتوفر فيه شروط الاستدلال الصحيح ، يكون استدلالا غير صحيح . إلا أن هناك أغلوطة أخرى تتعلق بالصيغ الاستدلالية الموسعة ، قد تنشأ في حالة وجود أو إدخال دالة مسورة إضافية . ولتوضيح ذلك نذكر أنه يجب في الاستدلال الصحيح أن تكون الحالة الخاصة التي ينطبق عليها للقدم ، هي نفسها الحالة الخاصة التي توضح انطباق التالي عليها أيضا . وهذا يعني أن الدالة الإضافية — والتي نرمز لها عادة بالرمز « ه س » — يجب أن تكون هي نفسها في المقدمة وفي النتيجة ، وإلا كان الاستدلال غير صحيح .

ولنفرض في هذا الصدد أن لدينا الصيغة التالية : —

$$[(س) (دس د - و س) \cdot (س) (س) (دس \cdot ه س)] : د :$$

$$(س) (س) (س \cdot ه س)$$

في هذا الاستدلال ، نجد أن الدالة الثالثة « ه س » ، قد وردت على أنها « ه س » في النتيجة ، وعلى ذلك فإن اللزوم ، ومن ثم الاستدلال ، يكون غير صحيح .

ثالثا : استدلالات خاصة بتسلسلات اللزوم :

وهي عادة ما تكون استدلالات مركبة من قضايا كلية ، مثل الاستدلالات التالية : —

(١) استدلالات صحيحة :

١ — لنفرض أن لدينا الصيغة التالية : —

$$[(س) (دس د و س) \cdot (س) (س) (س د ه س)] : د :$$

$$(س) (دس د ه س) \cdot$$

الآن يمكننا تطبيق مبدأ إختصار الأسوار ، فنكتب السور مرة واحدة فقط ، وذلك بوضعه قبل العبارة كلها ، ما دام هو السور الذى يقيد جميع المتغيرات فى العبارة الزومية كلها وذلك كما يلي :-

$$(س) \{ [(د س \supset س) \cdot (س \supset ه س)] \supset (د س \supset ه س) \}$$

وهى صيغة تعبر عن استدلال صحيح . وهذا ما يمكن إظهاره من إتفاق هذه الصيغة مع المتسلسلة الزومية (السابق ذكرها فى حساب القضايا) . فهذه الصيغة ، مثل متسلسلة الزوم) تخضع لثلاث قواعد هى :-

- ١ - أن يكون المقدم فى المقدمة الأولى « د س » ، هو المقدم فى النتيجة .
 - ٢ - أن يكون تالى المقدمة الأخيرة « ه س » ، هو التالى فى النتيجة .
 - ٣ - أن يكون التالى فى المقدمة الأولى ، هو نفسه للمقدم ، فى المقدمة الثانية .
- هذا ويمكن إضافة قاعدة رابعة هنا فى حالة القضايا للسورة ، وهى :-
- ٤ - أن تكون جميع القضايا مسورة تسويرا كليا .
- وعلى ذلك فكل استدلال يستوفى هذه القواعد الأربع كلها ، هو استدلال صحيح .
- ٢ - قد لا تأتى عبارة الاستدلال مرتبة على النحو الوارد فى العبارة رقم ١ (أى السابقة) . ولذا فإننا عادة ما نعيد ترتيب الحدود أو الدالات أو القضايا للسورة ، لكي نوضح صيغة المتسلسلة الصحيحة .

ولناخذ لذلك مثلا الحجة التى قال بها سقراط من قبل : (إن الإنسان الذى يتصرف بإرادته لا يختار الأقل خيرا بدلا من الأكثر خيرا . وفاعل الشر يختار الأقل خيرا . ومن ثم فإن فاعل الشر لا يصدر فى فعله عن إرادة حرة) (١) .

(١) Schipper, E. & Schnb, E. : A Fiest Course in Modern Logic, p. 230.

فاذا أردنا أن نقين ما إذا كان هذا الاستدلال صحيحا ، فالتا نرمر للعبارة « س إنسان يتصرف بإرادته » بالرمز « د س » وللعبارة « س يختار الأقل خيرا » بالرمز « و س » ، وللعبارة « س فاعل للشر » بالرمز « ه س » فالتا نحصل على . -

(س) [(دس - و س) . (ه س د و س)] : د : (ه س د - دس) :

فهل مثل هذه الصيغة تعبر عن استدلال صحيح ؟

بمكتنا أن نقين أنه استدلال صحيح لو إتخذنا الخطوات التالية . -

١ - أن نضع بدلا من المقدمة اللزومية الأولى : (د س د - و س) ، عبارة اللزوم العكس الخاصة بها وهي : (و س د - دس) .

٢ - ثم نقوم بتغير وضع المقدمتين ، فنضع دالة القضية التي حصلنا عليها ، (و س د - دس) بدلا من المقدمة الثانية ، وبالعكس ، فنحصل على : -

(س) « [(ه س د و س) . (و س د - دس)] : د : (ه س د - دس) » وهي صيغة تعبر عن متسلسلة لزوم صحيحة ، ومن ثم فإن الاستدلال صحيح .

ب - استدلالات غير صحيحة :

أما بالذبة لأي استدلال مكون من قضايا كلية من هذا النوع ، ويكون من المتعذر علينا أن نوضح أنه قد أقيم على صيغة متسلسلة اللزوم ، فإنه يكون استدلالا غير صحيح .

ولذاخذ لذلك للنال التالي : (بما أن كل العلماء يفترضون فروضا فلسفية ، وبما أن الهامى ليس عالما ، فإن الهامى إذن لا يفترض فروضا فلسفية) . فلسكى تثبت

عما إذا كان هذا الاستدلال صحيحاً أم لا ، فإننا نرمز للعبارة « س عالم » بالرمز « د س » ، وللعبارة « س يفترض فروضاً فلسفية » بالرمز « و س » ، وللعبارة « س محامى » بالرمز « ه س » ، ومن ثم فإننا نحصل على :-

(س) « [(د س و س) • (ه س و د س) : د : (ه س و س)] »

فهل هذا استدلال صحيح أم لا ؟

إنه استدلال غير صحيح ، لأنه مهما كان تناولنا لهذه الصيغة ، فلن نستطيع أن نحصل منها على متسلسلة لزوم تستوفي جميع القواعد سالفة الذكر .

رابعاً : استدلالات قائمة على اللزوم العكسى :

الواقع أن الاستدلالات التى تحتوى على قضايا ذات أسوار - شأنها تماماً شأن تلك الاستدلالات التى تحتوى على قضايا غير مسورة - يمكن إقامتها بطريقة صحيحة على أساس العلاقات الأخرى التى تنشأ أو توجد بين القضايا ، مثل اللزوم العكسى ، والتنافر ، والفصل ، وغير ذلك مما سبق ذكره فى قائمة للتكافآت .

١ - ولناخذ فى حالة « اللزوم العكسى » ، المثال التالى من فلسفة كانط الخلقية ،

يرى كانط : (أن الفعل إذا لم يكن قائماً على أساس القانون الأخلاقى ، فلن تكون له قيمة خلقية . وهذا الرجل يرفض السرقة خوفاً من الوقوع فى قبضة القانون . ومن ثم فإن رفض السرقة لن يحمل قيمة خلقية) .

فإذا رمزنا للعبارة « س فعل تم على أساس القانون الأخلاقى » بالرمز « و س » وللعبارة « س يحمل قيمة أخلاقية » بالرمز « د س » وللعبارة « س إنسان يرفض السرقة » بالرمز « ه س » ، فإننا نحصل على :-

$$[(S)(DS \supset S) \cdot (E) \cdot (H \supset S)] : \supset : (E) \cdot (H \supset S) \cdot (DS \supset S) .$$

فإذا وضعنا بدلا من المقدمة الأولى : $(DS \supset S)$ ، دالة قضية الزوم العكسي لها ، حصلنا على : $(S \supset DS)$ ، ومن ثم تكون الصيغة الكاملة هي : —

$$[(S)(S \supset DS) \cdot (E) \cdot (H \supset S)] : \supset : (E) \cdot (H \supset S) \cdot (DS \supset S) .$$

(H.S.D.S) وهي صيغة تعبر عن استدلال صحيح ، لأنها تعبر عن قاعدة الرفع أو النفي وقد تم تطبيقها بالنسبة لمثال أو حالة خاصة .

٢ — ولناخذ لذلك مثلا آخر ، فلو كان لدينا الاستدلال التالي : —

(حيث أن الفروض القابلة للتحقيق فقط ، فروض علمية ، وبما أن الفرض الذي لا يمكن إختباره بالملاحظة لا يكون قابلا للتحقيق ، فإن الفروض التي يمكن إختبارها بالملاحظة فقط فروض علمية) ، فإننا لكي نتبين صحته ، سنرمز للعبارة « S فرض قابل للتحقيق » بالرمز « S » ، وللعبارة « S فرض علمي » بالرمز « DS » ، وللعبارة « S يمكن إختباره بالملاحظة » بالرمز « HS » ، ومن ثم فإننا نحصل على : —

$$(S) [(DS \supset S) \cdot (HS \supset S)] : \supset : (S)(DS \supset S) \cdot (HS \supset S) .$$

فإذا ما وضعنا بدلا من المقدمة الثانية : $(HS \supset S)$ دالة قضية الزوم العكس لها : $(S \supset HS)$ فإننا نحصل على الصيغة التالية (بعد اختصار لأسوار) : —

$$(S) [(D \supset S) \cdot (S \supset D)] : (D \supset S) : (D \supset S) \\ [(S \supset D)]$$

وهي صيغة صحيحة للمتسلسلة اللزومية ، ومن ثم فالاستدلال الذي تعبر عنه
استدلال صحيح .

خامساً : استدلالات قائمة على الفصل :

إن كثيراً من الاستدلالات الفصلية ، تطبق الفصل بالنسبة لحالة خاصة ، ولنأخذ
لذلك المثال الآتي :

(كل طالب إما أن يستذكر دروسه ، وإما ألا ينجح ، وهذا الطالب لا يستذكر
دروسه ومن ثم فهو لن ينجح) .

ولنرمز للعبارة « س يستذكر دروسه » بالرمز « د س » ، وللعبار « س ينجح »
بالرمز « س » . ومن ثم فإننا نحصل على : —

$$[(S) (D \supset S) \cdot (S \supset D)] : (D \supset S) : (D \supset S) \cdot S$$

هذا ويمكن البرهنة على صحة هذا الاستدلال بطريقتين :

١ — إذا ما أردنا الاحتفاظ بملاحة اللزوم ، يمكننا أن نضع بدلا من المقدمة
الفصلية ، صيغة القضية اللزومية المكافئة لها وهي : —

$$(S) (D \supset S) \cdot (S \supset D)$$

ومن ثم نحصل على الصيغة :

$$[(S) (D \supset S) \cdot (S \supset D)] : (D \supset S) : (D \supset S) \cdot S$$

وهي صيغة تعبر عن استدلال صحيح — له صورة « قاعدة الإثبات » أو الوضع —
يطبق ما هو كلي على حالة خاصة .

قوانين أخرى تتعلق بالاستدلال الخاص
بالقضايا للمسورة

كما سبق يمكننا أن نضيف إلى القوانين الخاصة بدالات القضايا والقضايا للمسورة
السابق الإشارة إليها — القوانين التالية : —

١ — جميع القوانين والاستدلالات الخاصة بمنطق القضايا .

٢ — قوانين التناقض .

- (١) — (س) (دس د ي س) \equiv (س) (س) (دس د ي س) .
(ب) — (س) (س) (دس د ي س) \equiv (س) (س) (دس د ي س) .
(ج) — (س) (س) (دس د ي س) \equiv (س) (س) (دس د ي س) .

٣ — قوانين التمثيل الخاصة بالاستدلال :

- (١) — (س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) : د : د :
(س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) .
(ب) — (س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) : د : د :
(س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) .
(ج) — (س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) : د : د :
(س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) .
(د) — (س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) : د : د :
(س) (س) (دس د ي س) (س) (س) (دس د ي س) .

٤ — قانون متسلسلة الازوم .

(س) [(دس د ي س) (س) (دس د ي س)] : د : د : (دس د ي س) (س) (دس د ي س) .

الفصل الخامس

الحساب التحليلي للعلاقات

Calculus of Relations

تعتبر النظرية العامة للعلاقات وكذا القوانين العامة المتعلقة بها من أهم أجزاء المنطق الحديث ، حتى لقد كان تشارلز بيرس — عالم المنطق الأمريكي المعاصر — يرى أن كل ما هو منطقي إنما يرتد إلى العلاقات (١) ولقد كان دي مورجن وبيرس (٢) أول من طور نظرية العلاقات في المنطق الحديث ، ثم قام إرنست شرويدر (٣) بتوسيع العمل الذي بدأه دي مورجن واستكماله ، ثم قام كل من رسل وهوايتهد في كتابهما « للبادئ الرياضية » بتطبيق حساب العلاقات بالنسبة لمجال الرياضيات ، وهذا ما قام به كذلك رسل في كتابته « أصول الرياضيات » ، و « مقدمة لفلسفة الرياضيات » ، وكذا الفرد تارسكي في كتابه « مقدمة للمنطق » ، وغيرهم من الناطقة المعاصرين .

حقاً إن فكرة العلاقة ليست بالفكرة الجديدة ، فقد عرفناها في المنطق التقليدي باسم الرابطة Copula التي تربط بين الموضوع والمحمول في القضية الجملة . كما

(١) Feibleman .J.K : An Introduction to Peirce's philosophy.p.105

(٢) إرجع في هذا إلى دراسة للمؤلف عن كتاب « المنطق الصحيح »

Exact Logic لتشارلز بيرس ، في مجلة تراث الانسانية ، المجلد ٧ ، العدد ٢ .

(٣) E. Schroder (١٨٤١ - ١٩٠٢) عالم المنطق الألماني الذي لا يزال كتابه

« جبر ومنطق العلاقات » Algebra und Logik der Relative 1885 — الذي يمثل الجزء الثالث من كتابه الكبير « محاضرات في جبر المنطق » uber die

Algebra der Logik من أهم الكتب التي بحثت الحساب التحليلي للعلاقات .

عرفناها من ثانياً الفصول السابقة حين تكلمنا عن أنواع العلاقات التي يمكن أن تقوم أو تربط بين الفئات أو بين القضايا ، أو القضايا ذات الأسوار . وزادت معرفتنا بها حين تكلمنا عن الاستدلال الذي كنا نستخدم فيه أساساً علاقة اللزوم بين المقدمات والنتائج . ونحن في كل ذلك كنا نستخدم العلاقة كي تربط بها تارة بين ماصدق مفرد وآخر أو بين بعض المناصقات وفئة من الفئات ، أو بين فئات بعضها مع بعض . وتارة أخرى بين قضايا وقضايا أخرى ، أو بين قضايا مسورة وقضايا أخرى ذات أسوار . كل ذلك بدون أن نتوقف عند العلاقة نفسها كي نحللها ونعرف خصائصها وصفاتها ، ونقيم الحساب التحليلي الخاص بها . وقد أصبح من اليسير علينا — بعد أن عرفنا العلاقات عن طريق استخدامها في الفصول السابقة — أن نتناولها من حيث خصائصها وأن نقيم الحساب التحليلي الخاص بها .

فإذا تساءلنا بعد ذلك عن العلاقة ، استطعنا القول بأنها تلك الخاصية أو السمة التي تنتمي لموضوع ما مثل إبعثاره مرتبطاً بموضوع آخر هو ب (١) ، أو هي الرابطة التي يمكن أن تربط بين موضوع (أو أكثر) بموضوع آخر (أو أكثر) .

وكما استخدمنا من قبل رموزاً — كمتغيرات — للجزئيات المفردة والفئات والقضايا ودالاتها ، فسوف نستخدم كذلك الرموز « ع » ، « غ » ، « ر » . . . كمتغيرات للعلاقات . بحيث يشير الرمز « ع » (٢) مثلاً لأي علاقة يمكن أن تنشأ بين موضوعين ، أي كانت هذه العلاقة ، ولا يشير إلى علاقة بعينها بالذات . ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا العبارة التالية : —

(١) Stebbing. S. : A Modern Introduction to Logic, P. 166

(٢) وقد استخدمنا الرمز « ع » لأنه أول حرف من حروف كلمة « علاقة » ،

وينظر الحرف R ، وهو أول حرف من حروف كلمة Relation .

« س أكبر من ص »

فإذا وضعنا بدلا من « أكبر من » للتغير « ع » حصلنا على العبارة الرمزية التالية :—

« س ع ص »

ومعنى هذا أننا قد عممنا الحكم في هذه العبارة ، فبدلا من أن نقول أن س ، ص يرتبطان بعلاقة هي « أكبر من » ، قلنا أن علاقة ما — وهي « ع » تربط بين س ، ص . فإذا ما أردنا التخصيص في مقابل التعميم بعد ذلك جعلنا للتغير « ع » ثابتاً ، فقلنا « س أكبر من ص » أو « س أصغر من ص » أو « س = ص » . وهذا معنى قولنا أن الرمز « ع » لا يرمز لعلاقة بينها ، بل لعلاقة ما ، مما يمكن أن تربط بين الحدين س ، ص .

وسنذكر فيما يلي ، قبل أن نعرض لتصنيف العلاقات ، بعض التعريفات (١) التي تتعلق بالنظرية العامة للعلاقات ، وذلك كما يلي :—

١ — للعلاقة — وهذا ما يتضح بصفة خاصة في العلاقات الثنائية ، أى التي تربط بين حدين مثل س ، ص في الصيغة « س ع ص » ، أو ا ، ب في الصيغة « ا ع ب » — طرف تبدأ منه ، وهو س في الصيغة الأولى ، وطرف تنتهى إليه ، وهو ص في الصيغة نفسها .

ويسمى الطرف الأول referent بطرف البداية (٢) ، أو السابق predecessor

(١) ويمكن الرجوع في هذا الصدد إلى كتاب « للنطق الوضعى » للدكتور زكى نجيب محمود ، الجزء الأول ، ابتداء من صفحة ١٥٣ ، وكذا إلى كتاب « مقدمة لفلسفة الرياضيات » لبرتراند رسل ، الترجمة العربية ، صفحة ٥٥ .
(٢) د. زكى نجيب محمود : للنطق الوضعى ، الجزء الأول ، صفحة ١٥٣ .

على العلاقة (١) ، أو التعلق به (٢) . كما يسمى الطرف الثاني في العلاقة *relatum* بطرف النهاية ، أو نهاية العلاقة (٣) أو اللاحق *Successor* للعلاقة (٤) أو التعلق (٥) ولقد فضلنا استخدام التعبيرين «طرف البداية» ، «طرف النهاية» في العلاقة لأننا عادة ما نتكلم عن اتجاه *Direction* للعلاقة (٦) . فإذا قلنا مثلاً «س يحب ص» كان اتجاه هذه العلاقة يبدأ من طرف هو المحب إلى طرف الآخر هو المحبوب ، كما أن علاقة «والد» تبدأ من طرف هو الأب ، لكي تنتهي إلى طرف آخر هو الابن (٧) .

وبما أن س ، ص في الصيغة السابقة «س ع ص» متغيران يمكن أن نضع بدلاً منهما أكثر من ثابت أو قيمة ، فإن هناك مجموعة من القيم الخاصة بـ «س» ، ومجموعة من القيم الخاصة بـ «ص» بحيث تتعدد كل مجموعة منهما بناء على العلاقة «ع» التي تربط بين س ، ص .

فلو كانت «ع» مثلاً ترمز لعلاقة «على يعين» في الصيغة :

«س ع ص»

فإننا نستطيع تحويل هذه الصيغة إلى أكثر من قضية مثل : —

(١) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.

(٢) وهو المصطلح الذي ورد في الترجمة العربية لكتابي «أصول الرياضيات» ، «مقدمة لفلسفة الرياضيات» لبرتراند رسل .

(٣) د. زكي نجيب محمود : للنطق الوضعي ، (الجزء الأول) ، صفحة ١٥٣ .

(٤) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.

(٥) وقد ورد هذا المصطلح في الترجمة العربية لكتابي برتراند رسل ، سالف الذكر .

(٦) Stebbing, S. ; A. Modern Introduction to Logic, P. 167.

(٧) المرجع السابق ، صفحة ١٦٨ .

القلم على يمين الكتاب
الطالب على يمين زميله
منزلى على يمين منزلك

لكننا لا نستطيع مثلاً القول بأن « التفضيلة على يمين الكتاب » . ومن ثم
فهناك عالم مقال معين لقيم س ، ص ، يتعدد وفقاً للعلاقة « ع » أو بعبارة أخرى
هناك نطاق لاستخدام الثوابت بدلاً من المتغيرات س ، ص .

وعادة ما تسمى مجموعة الثوابت التي يمكن استبدالها بالمتغير « س » ، أى الفئة
المكونة من كل البدايات ، باسم نطاق Domain للعلاقة (١) ، كما يسمى النطاق
الحاص بالمتغير « ص » عادة — بالنطاق المضاد Counter-domain أو النطاق
العكسي Converse-domain وذلك تمييزاً له عن نطاق « س » . ومن ثم فالنطاق
العكسي هو الفئة المكونة من كل النهايات التي تنتهى إليها العلاقة ، أو هو مجموعة
الثوابت التي يمكن استبدالها بالمتغير ص .

كما يسمى عادة مجموع النطاقين : النطاق ، والنطاق العكسي باسم مجال Field^(٢)
العلاقة .

تصنيف العلاقات :

العلاقات تختلف تبعاً لاختلاف الموضوعات أو الحدود التي تربط بينها ، ولذا
يمكن تصنيفها من أكثر من زاوية : —

Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 88.

(١)

Lee, H. : Symbolic Logic, p. 39.

(٢)

أولاً : من حيث نوع الحدود :

١ — فالملاقات التي تربط بين حدود العبارة أو عناصر القضية الواحدة ،

مثل :-

« س ع ص »

أو « ا ع ب »

تسمى عادة بالملاقات المنصرية Constnent Relations^(١) .

٢ — كما تسمى العلاقات التي تربط بين قضيتين أو أكثر باسم العلاقات المنطقية.

مثل علاقة « اللزوم » التي تربط بين p ، q في الصيغة $(p \supset q)$ ، والتي نعبر عنها بتغير العلاقة على النحو الآتي :-

« p ع q »

وغير ذلك من العلاقات^(٢) .

(١) Langer, S. : A Introduction to Symbolic Logic, p, 10

(٢) وتذكر موزان لانجر في كتابها السابق « صفحة ٧٥ » أن العلاقات المنطقية الأساسية هي :- العطف والفصل واللزوم . ونحن كنا قد استخدمنا من قبل كلا من العطف والفصل على أنهما من الإجراءات التي تتخذ إزاء القضايا أو القضايا . ولذا سندكرهما كذلك حين نعرض للإجراءات التابعة إزاء العلاقات . إرجع كذلك إلى :

Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, p. 166.

ثانياً : من حيث عدد الحدود :

ويسمى عدد الحدود المطلوبة لقيام العلاقة ، بدرجة Degree^(١) للعلاقة : -

١ - والعلاقة قد تربط بين الحد الواحد ونفسه ، مثل علاقة « يساوي » مثلاً التي تربط بين أى شيء ونفسه ، وهذا واضح كذلك من علاقة الهوية التي كنا نعبر عنها بالقول بأن « الشيء هو هو نفسه ولا يساوي إلا نفسه » . ومن ثم فإننا كنا نعبر عن مبدأ الهوية بقولنا :

$$س = س .$$

نإذا وضعنا متغير العلاقة بدلا من علاقة التساوي لحصلنا على الصيغة التالية : -

$$س ع س (٢)$$

وتسمى العلاقة في هذه الحالة بالعلاقة الأحادية أو Monadic (وسوف نسميها بعد بالعلاقة الانعكاسية) ، كما تسمى أيضاً بالعلاقة ذات المتغير الحر الواحد.

٢ - أو قد تربط العلاقة بين حدين ، مثل :-

$$« س على يمين ص »$$

$$أو « س أكبر من ص »$$

وتسمى في هذه الحالة بالعلاقة الثنائية dyadic ، أو قد تسمى كذلك بالعلاقة ذات المتغيرين الحرين . وتأخذ الصيغة العامة التالية : -

$$« س ع ص »$$

أو تأخذ أيضاً الصيغة التالية : -

Langer, S. An Introduction to Symbolic Logic. P. 61 (١)

Lee, H. : Symbolic Logic, p. 34 (٢)

(م ٢٢ - أسس المنطق الرمزي)

ع (س ، ص) (١)

٣ — أو قد تربط بين ثلاثة موضوعات أو حدود ، مثل : —

« س بين ص ، و »

أو : « س اخترى ص من و »

وتسمى العلاقة في هذه الحالة بالعلاقة الثلاثية triadic (٢) ، أو بالعلاقة ذات المتغيرات الثلاثة ، وتأخذ الصيغة العامة التالية : —

ع (س ، ص ، و) (٣)

٤ — أو قد تربط بين أكثر من ثلاثة من الحدود ، وسنرمز للمدد غير المحدود من الحدود بالمتغير « ن » . وتسمى العلاقة في هذه الحالة بالعلاقة كثيرة (أو متعددة) الحدود polyadic (٤) أو ذات «ن» من الحدود أو المتغيرات n-adic relation (٥) ، وتأخذ الصيغة العامة التالية : —

ع (س ، ص ، ، ، ، ، ، ن)

ثالثاً : من حيث طبيعة الحدود :

١ — علاقات من الدرجة الأولى of the first order ، وهي تلك التي تربط بين جزئيات مفردة مثل :

« س ع ص »

Lee, H. : Symbolic Logic. p. 23 (١)

Langer, S. : An Introduction to Symbolic Logic. p. 61 (٢)

Lee, H. : Symbolic Logic. p. 23 (٣)

Langer, S. : An Introduction to Symbolic Logic. p. 61 (٤)

Lee, H. : Symbolic Logic, p. 50 (٥)

٢ — أو علاقات مختلطة Mixed ، وتربط بين جزئيات مفردة وبين فئات ،
مثل س ع ا (وقد عبرنا عنها في حساب الفئات بالصيغة الرمزية : $s \equiv a$) .

٣ — أو علاقات من الدرجة الثانية of the second order ، وهي التي تربط
أو تقوم بين فئات مثل « ا \supset ب » أو « ا = ب » ، ونرمز لها بالرمز : —

ا ع ب ،

أو التي تقوم بين علاقات من الدرجة الأولى (١) .

هذا وتسمى أحياناً العلاقة « ع » في اللصيح الشبيهة بالصيغة : —

س ع ص ، بعلاقة واحد بواحد .

أو بالصيغة : س ع ا ، بعلاقة واحد بكثير .

أو بالصيغة : ا ع س ، بعلاقة كثير بواحد .

أو بالصيغة : ا ع ب ، بعلاقة كثير بكثير .

وسوف نعود إلى توضيح ذلك حين نعرض لعلاقة التضايف المشترك فيما بعد .
لأما فيما يتعلق بالعلاقات من الدرجة الثانية التي تقوم بين علاقات وتربط بينها ،
فيمكن أن نمثل لها بعلاقة التضمن أو الهوية أو غيرهما ، وسنعود إلى ذلك بشيء من
التفصيل حين نعرض للعلاقات بين العلاقات .

أهم الاجراءات الخاصة بحساب الفئات :

١ — اجراء النفي Negation

ويسمى أحياناً باجراء الاكمال Complementation . وكما ذكرنا من قبل

أن الفئة للكلمة لفئة ما تكون هي نفي هذه الفئة ومن ثم كانت الكلمة لفئة ١ ،
فكذلك نقول عن نفي العلاقة ع ، بأنها العلاقة :

ع

أو العلاقة للكلمة العلاقة ع .

ولتوضيح ذلك نفترض أن لدينا العبارة التالية : « محمد أصغر من علي » ، والى
نعبّر عنها رمزيا بالصيغة :

« س ع ص »

وأردنا أن ننفي هذا القول ، وذلك لعلمنا أن محمدا الذي رمزنا له بالرمز س
ليس أصغر من علي ، فأمانا أحد أمرين : —

١ — إما أن نقول بأن العبارة « محمد أصغر من علي » هي قضية كاذبة ، ومن
ثم فالتنا نضع أمام صيغتها الرمزية ، علامة نفي القضية فنحصل على : —

« - (س ع ص) » .

٢ — أو أن ننفي العلاقة التي تربط بين محمد وعلي فنقول انهما لا يرتبطان
بعلاقة « أصغر من » . وفي هذه الحالة فالتنا نضع علامة نفي الحدد ، فوق التعبير
« ع » ، فتصبح « عَ » ، ومن ثم نحصل على الصيغة التالية : —

« (س عَ ص) » .

والواقع أن الصيغتين الرمزيتين السابقتين ، تعبران عن معنى واحد ، وتدلان
على كمية صدق واحدة ، وعن ثم فهما متكافئتان . ولذا فالتنا عادة ما نعرف نفي
العلاقة ، (بأنها العلاقة التي تربط بين شيئين في حالة ما إذا كانت العلاقة ع لا تربط
بينهما . وبعبارة أخرى ، فانه بالنسبة لأي س ، ص ، نجد أن الصيغتين :

س ع ص ، - (س ع ص)

متكافئتان أو متساويتان (١) ، وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزيا كما يلي:-

$$(س) (ص) \equiv (س ع ص) - (س ع ص) .$$

كما أننا نستطيع التعبير عن العلاقة بين ع ، ع في هذه الحالة بالقول أنهما في حالة تناقض ، بمعنى أن صدق أو كذب أحدهما يساوي نفي كذب أو صدق الأخرى (على الترتيب) . ومن ثم فإننا نحصل على : -

$$ع = \overline{(ع)} ، أى ع = \overline{ع} .$$

$$وعلى : \overline{ع} = (ع) ، أى \overline{ع} = ع .$$

هذا ويلاحظ أننا أحيانا حينما نشير إلى علاقة ما بثابت معين ، نستطيع الإشارة إلى ما يكمل هذه العلاقة بنفي الرمز الذى توصل اليه من ذلك الثابت بعد أن نضع عليه خطأ رأسيا أو مائلا ، (فنفي العلاقة > « أصغر من » مثلا ، غالبا ما نرمز له بالرمز « > » (٢) ، الذى يعنى « ليس أصغر من » . ولعلنا نذكر في هذا الصدد علاقة « يساوى » بين الفئات ، أى « = » التى استخدمنا لنفيها علاقة « لا يساوى » أى « ≠ » ، وكذا علاقة « يكافئ » ، أى « ≡ » بين القضايا التى استخدمنا لنفيها علاقة « لا يكافئ » ، أى « ←/→ » .

٢ - إجراء العكس : Conversion

والإجراء فى هذه الحالة ينصرف أساساً إلى العلاقة لا إلى حدودها أو متغيراتها ، وهو فى هذا شبيه بالإجراء الذى توصلنا بواسطته إلى ع من ع . ولتوضيح ذلك ،

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٢

(٢) المرجع السابق ، للوضع نفسه .

لنفرض أن لدينا العبارة السابقة : « محمد أصغر من طى » ، أى : « س ع ص » ،
وكنا نعرف أن العكس صحيح ، وأن محمداً أكبر من طى وليس أصغر منه فإثنا
في هذه الحالة لا تنفي العلاقة فقط ، بل تؤكد أن عكسها صحيح . وفي هذه الحالة
أيضاً يكون أمامنا أحد أمرين .

١ — إما أن نقول « على أصغر من محمد » ، فنحصل على : —

(ص ع س)

وفي هذه الحالة نجد أن إجراء العكس قد انصرف بطريقة غير مباشرة إلى العلاقة
عن طريق تغيير وضع للنطاق والنطاق العكس في مجال العلاقة . ونحن قليلاً ما نستخدم
هذه الطريقة . ولقد عبر تارسكى عن هذا المعنى بقوله : (العلاقة ع^٢ تربط بين س ،
ص ، فقط إذا كانت ع تربط بين ص ، س) (١) .

٢ — أو أن نقول بعكس العلاقة السابقة ، وذلك كما يلي :

(محمد « أكبر من » طى) ،

فإذا ما أردنا أن نعبر عن العلاقة « أكبر من » ، وهى عكس العلاقة « أصغر
من » فإننا نستخدم لها الرمز : « ع^٢ » ، الذى يعبر عن عكس العلاقة « ع » .
ومن ثم فإن عكس الصيغة العلاقية : (س ع ص) ، تكون هى : —

« س ع^٢ ص »

وهكذا تكون الصيغتان : (ص ع س) ،

(س ع^٢ ص)

متكافئين أو متساويين كما ذكر تارسكى من قبل . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً على النحو الآتى : —

$$(س) (ص) : [(س ع ص) \equiv (ص ع س)] .$$

هذا ويلاحظ أننا أحياناً — وخاصة فى الرياضيات — حينما نشير إلى علاقة ما بثابت معين ، فنستبدل بمتغير العلاقة « ع » مثلاً الثابت « > » الذى يدل على — علاقة « أصغر من » ، فإننا نستطيع أن نضع ثابتاً آخر ، عكس للثابت الأول ، بتغيير وضع علامة الثابت الأول ، فنحصل مثلاً على الرمز : « < » الذى يدل على « أكبر من » وهى عكس العلاقة « أصغر من » وفى هذا الصدد يقول تارسكى : (إذا ما أشرنا إلى علاقة ما ، بثابت معين ، فإننا نشير إلى عكس هذه العلاقة بنفس الرمز فى وضع مقلوب . فعكس العلاقة « > » مثلاً هى العلاقة « < » ، طالما أنه بالنسبة لـ س ، ص ، تكون الصيغتان التاليتان : $س > ص$ ، $ص < س$ متكافئتين)^(١) .

٣ — إجراء الجمع :

سوف نستخدم لإجراء الجمع بين العلاقات الرمز : « U »^(٢) ، الذى كان — نخدمه بيانو G. Peano للجمع بين الفئات ، وذلك تمييزاً لهذا الإجراء ، عن إجراء الجمع بين الفئات (الذى استخدمنا له الرمز « + ») ، وبين القضايا (الذى استخدمنا له الرمز « V ») .

والجمع قد يكون : —

١ — جمعاً للعلاقة الواحدة بإضافتها إلى نفسها . وعلى ذلك يمكننا أن نكتب :

(١) للرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٩١

$$ع \cup ع = ع \cdot (١)$$

كما يمكن التعبير عن الجمع السابق ، بشكل أكثر وضوحاً لو كتبنا :

$$(س ع ص) \cup (س ع ص) \equiv (س ع ص)$$

وتقرأ : إن القول بأن س مرتبط بالعلاقة ع مع س ، أو بأن س مرتبط بالعلاقة ع مع ص ، وكررنا ذلك مرة أو أكثر من مرة ، فالنتيجة تكون مساوية لقولنا هذه العبارة للعلاقة مرة واحدة فقط .

وبعبارة أخرى فإن تكرار القول بالعلاقة « ع » أو العلاقة « ع » أكثر من مرة مساو لقولنا بالعلاقة « ع » مرة واحدة فقط .

٢ — أو قد يكون جمعاً لعلاقتين مختلفتين . فلو كانت لدينا العلاقتان : « ع » « غ » مثلاً ، فإننا نسمى الصيغة :

$$« ع \cup غ »$$

بمحصل الجمع المنطقي للعلاقتين ع ، غ . كما يمكن التعبير عن الجمع السابق ، بشكل أكثر وضوحاً لو قلنا أن حاصل الجمع المنطقي للصيغتين :

$$(س ع ص) ،$$

$$(س غ ص) ،$$

هي الصيغة : « س (ع \cup غ) ص » .

(١) وتناظر هذه الصيغة ، الصيغة « ١ + ١ = ١ » في حساب الفئات ،

والصيغة « ٧ \cup ٧ \equiv ٧ » في حساب القضايا .

وفي هذا الصدد يمكن القول بأن الصيغة « ع U غ » ، تربط بين أى شيئين إذا كانت إحدى العلاقتين « ع » أو « غ » تربط بينهما . وبعبارة أخرى ، تكون الصيغة :

س (ع U غ) ص ،

مساوية أو مكافئة للشرط التالى : (س ع ص) أو (س غ ص)^(١) . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً كما يلي :-

س (ع U غ) ص \equiv (س ع ص) U (س غ ص) .

ولكى تزداد هذه الصيغة وضوحاً ، نفرض أن « ع » ترمز لعلاقة الأبوة ، وأن « غ » ترمز لعلاقة « الأمومة » ، ومن ثم فإن الصيغة (ع U غ) ، تكون تعبيراً رمزياً لعلاقة الوالدية parenthood . ومن ثم فإننا نقرأ الصيغة : -

س (ع U غ) ص

على النحو الآتى : إن س يرتبط بعلاقة « الوالدية » مع ص ، فهو إما أن يكون « والد » ص أو « أم » ص .

٤ - إجراء الضرب :

وسوف نستخدم لإجراء الضرب بين العلاقات الرمز : « \cap » ، الذى كان يستخدمه بيانو للضرب بين الفئات ، وذلك تمييزاً لهذا الإجراء ، عن إجراء الضرب بين الفئات (الذى استخدمنا له الرمز « \times ») ، وعن إجراء الضرب بين القضايا (الذى استخدمنا له الرمز « \cdot ») .

(١) للرجع السابق ، صفحة ٩١ .

والضرب للنطق للعلاقات قد يكون :

١ — ضرباً لعلاقة واحدة في نفسها ، أى يكون تكراراً للعلاقة الواحدة .
ويسمى في هذه الحالة بإجراء تربع العلاقة ، وتسمى نتيجة الضرب في هذه الحالة
بمربع Square العلاقة الأولى .

٢ — أو قد يكون ضرباً لعلاقين مختلفتين ، ويسمى في هذه الحالة بمحاصل
الضرب النسبي Relative Product .

أولاً : تربع العلاقة:

أى تكرار العلاقة الواحدة أو ضربها في نفسها . وهو قد يؤدي :-

١ — إما إلى العلاقة ذاتها ، وفي هذه الحالة تكون :-

$$ع \cap ع = ع$$

فإذا كانت « ع » ترمز لعلاقة « أخ » ، وكانت لدينا معرفة بثلاثة إخوة أشقاء
م : س ، ص ، و استطعنا أن نكتب :

$$(س \text{ ع } ص) \cdot (ص \text{ ع } و) : س : ع \text{ و} .$$

وهذا ما ينطبق على علاقات أخرى مثل « سالف » ancestor^(١) ، أو « سابق
على » ، أو « يساوى » ، أو « على عين » .. وغير ذلك . وهكذا يكون مربع
علاقة « يساوى » هو « يساوى » ومربع علاقة « سابق على » ، هو
« سابق على » ...

(١) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, p. 171

ب — وإما أن يؤدي ترييع العلاقة إلى علاقة أخرى ، وفي هذه الحالة تكون :

$$ع \cap ع \neq ع .$$

أي أنها تساوى علاقة أخرى غير « ع » ، ولتكن « غ » مثلاً . ونعبر عن ذلك كما يلي :

$$ع \cap ع = غ$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي : لو كانت « ع » ترمز لعلاقة « والد » أو « أب » ، وكانت تربط بين ثلاثة حدود على النحو الآتي : —

$$(س ع ص) ، (ص ع و) .$$

أي إذا كان س والد ص ، وكان ص والد و ، فإن هذا لا يعني أن (س ع و) ، أي لا يعني أن س والد و ، بل هو جد و . وعلاقة « جد » علاقة جديدة غير علاقة والد ، وإن كانت نتيجة لتكرارها أو لضربها في نفسها مرتين . ويمكن التعبير عن ذلك للمعنى بالقول الآتي : « بالنسبة لأي س ، ص ، و : فإنه لو كانت س ع ص ، وكانت ص ع و ، تكون إذن س غ و » . ونعبر عن ذلك رمزياً بواسطة إحدى الصيغ التالية : —

$$(س)(ص)(و) : [(س ع ص) \cdot (ص ع و)] \supset (س غ و) .$$

$$\text{أو : } \supset س ع و .$$

$$\text{أو : } \leftarrow / \rightarrow س ع و .$$

ومما هو جدير بالملاحظة أن عكس مربع العلاقة « والد » ، أي العلاقة « جد » ، هو مربع العلاقة « ابن » ، أي العلاقة « حفيد »^(١) .

(١) للرجع السابق ، للموضع نفسه .

ثانياً : الضرب النسبي :

وعادة ما يكون حاصل ضرب النسبي بين علاقيتين مختلفتين ، مثل « ع » ، « غ » ، ويرمز له في هذه الحالة بالصيغة : —

« ع Ω غ »

وإن كان هناك رمز شائع الاستخدام في كتب المنطق للتعبير عن ضرب النسبي بين العلاقات وهو الرمز « / » بدلا من الرمز « Ω » ، لذا عادة ما يرمز لضرب النسبي بين العلاقتين ع ، غ بالصيغة :

(ع / غ) ، (١)

وهي الصيغة التي سوف نستخدمها في هذا الكتاب للتعبير عن ضرب النسبي لعلاقيتين . ويعرف ضرب النسبي للعلاقيتين ع ، غ بأنه تلك العلاقة التي تربط بين موضوعين ، مثل س ، ص ، فقط إذا كان هناك شيء ثالث هو « و » بحيث تكون « س » مرتبطة بالعلاقة «ع» مع « و » ، أي (س ع و) ، وتكون « و » مرتبطة بالعلاقة « غ » مع « ص » ، أي (و غ ص) في الوقت نفسه . وناخذ لذلك المثال الآتي : —

إذا كانت « ع » مثلا ترمز لعلاقة « زوج » husband ، وكانت « غ » ترمز لعلاقة « ابنة » daughter ، كانت العلاقة « ع / غ » ترمز لعلاقة « زوج الابنة » (٢) ، أي العلاقة التي تربط بين شخصين هما س ، ص ، إذا وجدت « و »

Tarski, A. : Introduction to Logic, P. 92.

(١)

Church, A. : Introduction to Mathematical Logic, Voi. I,

(٢)

P. 316.

بحيث يكون « س » هو زوج « و » ، وتكون « و » هي ابنة « ص » . ومن ثم فإننا نقرأ الصيغة :

س « ع / غ » ص

على النحو الآتي : س زوج ابنة ص (١)

فإذا أردنا أن نحصل على عكس حاصل الضرب النسبي « ع / غ » ، فإننا نضع علامة العكس على الرمز كله ، وذلك على النحو الآتي :

، (ع / غ)

أو بغير وضع العلاقتين ، وعكس كل منهما على حدة مثل :

غ / ع

ومن ثم فإننا نحصل على :

(ع / غ) = غ / ع (٢)

هذا ويلاحظ رسل في كتابه « مقدمة للفلسفة الرياضية » إن حاصل الضرب النسبي للعلاقات ليس من الضروري أن يكون متبادلاً (٣) ، بمعنى أن العلاقة « ع / غ » ليس من الضروري أن تكون مساوية للعلاقة « غ / ع » . إذ أن حاصل

(١) Tarski, A.: Introduction to Logic, P. 92.

(٢) Stebbing, S.: A. Modern Introduction to Logic, P. 171.

(٣) وكان أول من تنبه إلى مثل هذه للملاحظة هو تشارلز بيرس عالم المنطق الأمريكي . إرجع إلى دراسة لنا نشرت عن المنطق الصحيح « لنشارلز بيرس في مجلة تراث الانسانية ، المجلد السابع العدد ٢ ، صفحة ١٥٠

الضرب النسبي للعلاقين ع ، غ في الصيغة : (س « ع / غ » ص) يعنى زوج الإبنه كما رأينا من قبل ، لكن حاصل الضرب النسبي للعلاقين غ ، ع في الصيغة :

س « غ / ع » ص ،

يعنى إبنه الزوج daughter-in law . ويمثل لذلك رسل بقوله : (إن حاصل الضرب النسبي للوالد والأخ هو العم ، أما حاصل الضرب النسبي للأخ والوالد هو الوالد) . (١)

أهم خصائص العلاقات :

سندكر فيما يلي أهم خصائص العلاقات (والعلاقات الثنائية منها بصفة خاصة) :-

١ — الانعكاس Reflexiveness

والانعكاس صفة للعلاقة التي يرتبط بها أى حد مع نفسه (٢) . وفيما يتعلق بهذه الصفة فائنا نجد ثلاثة إمكانات :-

١ - أن تكون العلاقة انعكاسية reflexive حينما تربط بين أى حد ونفسه (٣) لو حين تستوفى دائماً الشرط التالى :-

« س ع س » (٤)

ويمكن توضيح ذلك بذكر أمثلة لعلاقات تتصف بهذه الصفة ، مثل علاقة

(١) رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية ، (الترجمة العربية) صفحة ٧٦ .

(٢) Stebbing, S. : A Modern Introduction to Logic, P. 168.

(٣) للرجع السابق ، صفحة ١٦٧ .

(٤) Lee, H. : Symbolic Logic, P. 34.

« التساوى » بين الحد الواحد ونفسه ($s = s$) أو بين الفئة ونفسها ($a = a$)
أو علاقة « التكافؤ » بين القضية ونفسها ($p \equiv p$) . فكل شيء — أياً كان —
يساوى نفسه ولا يساوى إلا نفسه ، ويكون دائماً هو هو . ومثل علاقة « اللزوم »
لأن كل قضية تستلزم نفسها : ($p \supset p$) ، ومثل علاقة « التضمن » لأن كل فئة
تكون متضمنة في نفسها : ($a \supset a$) ، وغير ذلك .

ب — أو أن تتصف العلاقة بعدم الانعكاس *irreflexiveness* وذلك في حالة
ما إذا لم تكن صالحة للربط بين الحد الواحد ونفسه . مثل العلاقة « أكبر من » أو
« أصغر من » . فالشيء الواحد لا يكون « أكبر من » نفسه ، ولا « أصغر من »
نفسه . وهذا ما نعبر عنه رمزياً بالصيغة التالية : —

• (س ع س) —

وتسمى مثل هذه العلاقة ، بالعلاقة اللا انعكاسية *irreflexive* ^(١) ، ويسمى
رسل بالعلاقة المحوية في التعدد *Contained in diversity* أو التي تستلزم التعدد
implying diversity ^(٢) ، أو بالعلاقة العريية (أو للغايرة) *alio-relative* ^(٣)

(١) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 93.

(٢) رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية . (الترجمة العربية) صفحة ٥٥ .

(٣) وكلمة *alio-relative* من وضع تشارلز بيرس عالم المنطق الأمريكي . انظر :

Stebbing, S. ; A Modern Introduction to Logic, P. 169.

و — ووردت ترجمة هذه الكلمة ، في الترجمة العربية لكتاب برتراند رسل
« مقدمة للفلسفة الرياضية » صفحة ٥٥ ، باسم العلاقة العريية ، كما اقترح الأستاذ
الدكتور زكي نجيب محمود ترجمتها بالعلاقة المغايرة (انظر هامش صفحة ٥٥ من
المرجع نفسه) .

وسوف نأخذ بتسميتها بالعلاقة اللا انعكاسية حتى يكون هناك اتساق بين المصطلحات العربية مثل اللا انعكاس واللا تعادل ... وغير ذلك .

ح — أو أن توصف العلاقة بأنها جائزة الانعكاس non-reflexive وذلك حينما لا تكون للعلاقة انعكاسية ، أو لا انعكاسية ، أو بمعنى آخر حينما يمكن أن تكون هذا ويمكن أن تكون ذلك . مثل علاقة « يعجب » أو علاقة « يكره » ، فالإنسان لا يعجب بنفسه دائماً أو يكره نفسه ، بل هو أحياناً ما يفعل ذلك (١) .

وهكذا إذا اعتبرنا أن « س ع س » هو شرط اتصاف العلاقة بالانعكاس ، استطعنا أن ننتهي إلى :

١ — أن العلاقة الانعكاسية ، تستوفي هذا الشرط دائماً .

٢ — أن العلاقة اللا انعكاسية ، لا تستوفي هذا الشرط إطلاقاً .

٣ — أن العلاقة جائزة الانعكاس ، لا هي بالتي تستوفيه دائماً ولا هي بالتي لا تستوفيه إطلاقاً .

٢ — التماثل Symmetry

وهي صفة تتصف بها العلاقات التي تفيد معنى التبادل في الاتجاه . وفيما يتعلق بهذه الصفة ، توجد ثلاثه إمكانيات هي :

١ — أن تكون العلاقة تماثلية Symmetrical إذا كان اتجاه العلاقة متبادلاً بين طرف البداية فيها وطرف النهاية . فإذا كانت (س ع ص) ، ترتب على ذلك أن تكون (ص ع س) أيضاً . ولذا يقال بأن العلاقة تكون تماثلية إذا كانت

تستوفي دائماً الشرط التالي : « إذا كانت (س ع ص) ، كانت إذن (ص ع س) » (١) ،
وهو ما نعبر عنه رمزياً على النحو الآتي :

$$(س ع ص) \supset (ص ع س)$$

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقة التالية : « أخ » ، لأنه إذا كان س « أخ » ص ،
كان كذلك ص « أخ » س . وكذلك علاقة « ابن عم » ، فإذا كان س « ابن عم »
ص ، كان ص كذلك « ابن عم » س . وأيضاً علاقة « يساوي » ، لأنه إذا كانت
س = ص ، كانت كذلك ص = س . ومثلها علاقة « لا يساوي » ، لأنه إذا
كانت س \neq ص ، كانت أيضاً ص \neq س . وغير ذلك .

ولذا يمكن التعبير عن علاقة التماثل (أو صفة التماثل في العلاقة) بقضية اللزوم
التالية :

« بالنسبة لأي س ، ص تكون س ع ص تستلزم ص ع س » (٢) ،
أو بالصيغة الرمزية التالية :

$$(س) (ص) [(س ع ص) \supset (ص ع س)] .$$

ب — أو أن تكون العلاقة لا تماثلية asymmetrical ، وهي تصف بهذه
الصفة حين تكون ذات اتجاه واحد فقط ، فلا تقبل الارتداد من طرف النهاية إلى
طرف البداية فيها . ويعبر تارسكي عن ذلك بقوله : إذا كانت الصيغة (س ع ص)
تستلزم الصيغة « - (ص ع س) » ، قيل أن العلاقة ع لا تماثلية (٣) . ومن ثم

(١) Lee, H. ; Symbolic Logic, P. 32.

(٢) Tarski, A. ; Introduction to Logic, P. 93.

(٣) المرجع السابق ، صفحة ٩٤ .

فإننا نعبّر عن ذلك بالقول بأن العلاقة اللاتماثلية ، لا تستوفي أبداً الشرط السابق ذكره ، أى الشرط الخاص بالتماثل وهو : (س ع ص) \supset (ص ع س) .

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقات التالية على سبيل المثال : علاقة « والد » ، فإذا كان س « والد » ص ، فإنه لا يمكن أن يكون ص « والد » س . ومثل علاقة « قبل » ، فإذا كانت س « قبل » ص ، فإنه لا يمكن أن تكون ص قبل س . ومثل علاقة « أطول من » فإذا كانت س « أطول من » ص ، فإن ص لا يكون « أطول من » س .

ولذا يمكن التعبير عن علاقة اللاتماثل ، أو عن صفة اللاتماثل في العلاقة ، بالصيغة الرمزية التالية : —

$$(س)(ص) [(س ع ص) \supset \neg (ص ع س)] .$$

ح — أو أن تكون العلاقة جائزة التماثل non-symmetrical وتصف بهذه الصفة إذا كان اتجاه العلاقة مما يمكن أن يترد من طرف لنهاية فيها إلى طرف البداية أو ألا يترد . مثل علاقة « يحب » وعلاقة « يكره » حين تربط بين س ، ص . فإذا كانت (س ع ص) — « أى : س يحب ص » — فمن الجائز أن تكون (ص ع س) — « أى : ص يحب س » فتكون العلاقة تماثلية ، ومن الجائز أن تكون « - (ص ع س) » أو (ص ع س) — « أى ألا يكون ص يبادل ص نفس الشعور ومن ثم فلا يحبه ، أى : ص لا يحب س » .

ويمكن التعبير عن ذلك اللغوي رمزياً كما يلي : —

$$(س)(ص) [(س ع ص) \supset (ص ع س) \vee \neg (ص ع س)] .$$

وهكذا فنحن إذا ما اعتبرنا أن تحقيق الصيغة التالية : —

$$(س ع ص) \supset (ص ع س)$$

هو شرط إتصاف العلاقة بالتماثل ، فإننا نستطيع الانتهاء إلى : — (١)

١ — أن العلاقة التماثلية ، تستوفي هذا الشرط دائماً .

٢ — أن العلاقة اللانماثلية ، لا تستوفي هذا الشرط أبداً .

٣ — أن العلاقة جائزة التماثل ، لا هي بالتي تستوفيه دائماً ، ولا هي بالتي لا تستوفيه إطلاقاً .

٣ — التمعدى Transitivity :

ويعنى إمكان قيام العلاقة التي تربط بين حدين ، بين أحد هذين الحدين وحد ثالث . وفيما يتعلق بصفة التمعدى ، توجد كذلك ثلاثة إمكانات هي : —

١ — أن تكون العلاقة تمعدية Transitive ، وذلك : (إذا كان — بالنسبة لأي س ، ص ، و — الشرطان التاليان : (س ع ص) ، (ص ع و) ، يستلزمان الصيغة س ع و)^(٢) . أو بعبارة أخرى ، تكون العلاقة تمعدية إذا كانت تستوفي الشرط التالي : « إذا كانت س ع ص ، وكانت ص ع و ، كانت إذن س ع و »^(٣) . وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتي : —

(س ع ص) . (ص ع و) : \vdash : س ع و .

ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا بدلاً من « ع » علاقة « أكبر من » ، فنحصل على : إذا كانت س أكبر من ص ، وكانت ص أكبر من و ،

Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 32 (١)

Tarski, A. ; Introduction to Logic, p. 94 (٢)

Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 33 (٣)

كانت إذن س أكبر من و . أو العلاقة « على يمين » ، فنحصل على : إذا كانت س على يمين ص ، وكانت ص على يمين و ، كانت إذن س على يمين و ، ومثل علاقة « قبل » أو « بعد » أو غير ذلك .

ولذا يمكن التعبير عن العلاقة للتعدي — أو عن صفة التعدي في العلاقة — بقضية اللزوم التالية :

$$(س) (ص) (و) \rightarrow [(س ع ص) \cdot (ص ع و) : \vdash : (ص ع و)] .$$

ب — أو أن تكون العلاقة لا متعدية ، أو لازمة Intransitive . وتتصف العلاقة بهذه الصفة إذا لم تكن تتمدى الربط بين حدين فقط إلى حد ثالث . أو بعبارة أخرى إذا كانت لا تستوفي الشرط السابق : (س ع ص) . (ص ع و) : \vdash : (س ع و) إطلاقاً . أو بمعنى آخر إذا كانت : (س ع ص) . (ص ع و) ، تستلزمان دائماً « - (س ع و) » . ويمكن توضيح ذلك لو وضعنا بدلاً من « ع » علاقة « والد » ، فنحصل على : — إذا كان س والد ص ، وكان ص والد و ، فإن س لا يكون والد و ، بل سيكون « جد » و . ولذا يمكن التعبير عن صفة اللزوم أو اللا تعدى في العلاقة ، بالصيغة التالية : —

$$(س) (ص) (و) \rightarrow [(س ع ص) \cdot (ص ع و) : \vdash : - (س ع و)] .$$

ج — أو أن تكون العلاقة جائزة التعدي non-transitive ، وهي تتصف بهذه الصفة إذا كان من الجائز ، وليس من الضروري أن تتمدى الربط بين حدين إلى حد ثالث ، أو بعبارة أخرى إذا كانت لا هى بالتي تستوفي الشرط السابق ذكره . للتعدي ، دائماً ، ولا هى بالتي لا تستوفيه أبداً . مثل علاقة « صديق » ، فإذا كان س صديق ص ، وكان ص صديق و ، فانه من الجائز أن يكون س صديق و (كأن

أقول بأن صديق صديقى هو صديقى) ، ومن الجائز أن لا يكون س صديق و . ومثل علاقة «يجب» فإذا كان س يجب ص ، وكان ص يجب و ، فانه من الجائز أن يجب س أو لا يجب و . ويمكن التعبير عن صفة جواز التعدى فى العلاقة رمزياً على النحو الآتى: —

$$(س)(ص)(و) \left[(س ع ص) \cdot (ص ع و) : (س ع و) \right] - (س ع و) .$$

وهكذا فنحن إذا ما اعتبرنا أن الصيغة التالية : —

$$(س ع ص) \cdot (ص ع و) : (س ع و)$$

هى شرط اتصاف العلاقة بالتعدى ، استطعنا أن نلهمى إلى : — (١)

١ — أن العلاقة المتعدية تستوفى هذا الشرط دائماً .

٢ — أن العلاقة اللا متعدية (اللازمة) ، لا تستوفى هذا الشرط أبداً .

٣ — أن العلاقة جائزة التعدى ، لا هى بالحق تستوفى هذا الشرط دائماً ، ولا هى بالحق لا تستوفيه إطلاقاً .

٤ — التضاييف المشترك : Correlation

ويمكن تصنيف العلاقات التى تنصف بهذه الصفة إلى : —

١ — علاقة واحد بواحد one-one relation

وتقوم حينما يوجد فى مقابل كل حد من حدود نطاق العلاقة ، حد آخر فى

(١) للرجع السابق ، للموضع نفسه .

النطاق العكسي يرتبط به بهذه العلاقة ، وبحيث لا يرتبط أى حد آخر من حدود النطاق ، بالعلاقة ذاتها ، مع الحد نفسه الموجود في النطاق العكسي .

وهكذا فالتعلق بالتضاييف المشترك عن طريق واحد بواحد إنما يقوم بين أحد حدود النطاق وأحد حدود النطاق العكسي . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزياً على النحو الآتي : —

« إذا كانت س ع ص ، وكانت س ع ن ، كانت إذن ن = ص ، وأنه في الوقت نفسه إذا كانت س ع ص ، وكانت وع ص ، كانت إذن و = س » (١) ، أو نعبر عنه بصيغة رمزية أخرى على النحو الآتي : —

$$(س ع ص) \cdot (س ع ن) : د : ن = ص ،$$

$$(س ع ص) \cdot (وع ص) : د : و = س$$

ويمكن توضيح ذلك بالعلاقة التي تقوم بين أى عضو في فئة معدودة ، وبين عضو آخر في فئة أخرى مماثلة لها عددياً . فعلاقة «زوج» أو «زوجة» — في المجتمعات التي تأخذ بالزواج الواحد monogamy ، هي علاقة واحد بواحد طالما أن هناك زوجة واحدة لكل زوج وأن هناك زوجاً واحداً لكل زوجة (٢) .

ب — علاقة واحد بكثير one-many relation

وترتبط بين أى حد من حدود نطاق العلاقة ، وبين أكثر من حد من حدود نطاقها العكسي ، بحيث لا يكون أى حد من حدود النطاق مرتبطاً بنفس العلاقة

(١) للرجع السابق ، صفحة ٤٠ .

(٢) للرجع السابق ، صفحة ٤١ .

مع نفس الحدود في النطاق العكسي . مثل علاقة « زوج » في المجتمعات التي تأخذ بنظام تعدد الزوجات إذ في مقابل الزوج الواحد قد توجد أكثر من زوجة . ومثل علاقة « الترييع » في مجال الأعداد ، فالعدد ٩ مثلاً هو مربع العددين : (٣) ، (٣-) .

وهكذا يمكن تعريف علاقة واحد بكثير على النحو الآتي : « إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (وع ص) ، كانت إذن و = س » (١)

وهذا ما يمكن التمييز عنه رمزياً بالصيغة التالية : —

$$(س ع ص) \cdot (وع ص) : \supset : و = س .$$

(ح) علاقة كثير بواحد many — one relation

وتربط بين عدد من حدود النطاق الخاص بالعلاقة ، وبين أي حد من حدود نطاقها العكسي ، بحيث لا يكون أي حد آخر من حدود النطاق العكسي مرتبطاً بنفس العلاقة مع الحدود ذاتها في النطاق .

ويمكن بصفة عامة القول بأن علاقة كثير بواحد تقابل علاقة واحد بكثير ، بمعنى أن كلا منهما مما يمكن أن تتحول إلى الأخرى باستخدام عكس العلاقة مع تغيير وضع النطاق والنطاق العكسي بالتبادل (٢) . مثل علاقة الزوجات بالزوج في المجتمعات التي تأخذ بنظام تعدد الزوجات فهي علاقة كثير بواحد وهي عكس علاقة الزوج بالزوجات ، ومثل علاقة « ابن » ، أي علاقة الأبناء بالأب . فهي علاقة كثير بواحد، وهي عكس علاقة « أب » ، أي علاقة الأب بأبنائه، فهي علاقة واحد بكثير .

(١) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٢) للرجع السابق ، صفحة ٤١ .

وهكذا يمكن التعبير عن علاقة كثير بواحد على النحو الآتي : —

« إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (س ع و) ، كانت إذن و = ص » (١)
وهذا ما يبر عنه رمزيا بالصيغة التالية :

$$(س ع ص) \cdot (س ع و) : \supset : و = ص$$

و — علاقة كثير بكثير many-many relation

وتربط بين أكثر من حد من حدود النطاق ، وبين أكثر من حدود النطاق
عكسي . مثل علاقة « يسبق » في مجال الأعداد الطبيعية ، فالأعداد : ٢ ، ٣ ، ٤
كلها تسبق الأعداد ٦ ، ٧ ، ٨ . (ويلاحظ أننا لو قلنا بعلاقة « يسبق مباشرة »
لكانت علاقة واحد بواحد ، طالما أنه يوجد في مقابل كل عدد طبيعي ، عدد واحد
فقط سابق له مباشرة) ومثل علاقة « والد » Parent of ، فهي علاقة كثير
بكثير ، طالما أن أي والد من الممكن أن يكون له أكثر من طفل ، وإن لكل
طفل والدين two parents (هما الأب والأم) . (٢)

وهكذا لو استطعنا تلخيص شروط التضاف المشترك في الشرطين الأساسيين

التاليين : —

$$١ - (س ع ص) \cdot (و ع ص) : \supset : و = ص$$

$$٢ - (س ع ص) \cdot (س ع و) : \supset : و = ص$$

(١) المرجع السابق ، صفحة ٤٢ .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤٣ .

لاتهينا إلى : —

١ — أن علاقة واحد بكثير تستوفي الشرط الأول ، لكن لا تستوفي الشرط الثاني .

٢ — أن علاقة كثير بواحد تستوفي الشرط الثاني ، لكن لا تستوفي الشرط الأول .

٣ — أن علاقة واحد بواحد تستوفي الشرطين معاً .

٤ — أن علاقة كثير بكثير لا تستوفي الشرطين معاً (١)

هذا ويمكننا أن نلاحظ كذلك ما يأتي : —

١ — أن عكس علاقة واحد بواحد ، هي كذلك علاقة واحد بواحد .

٢ — أن عكس علاقة واحد بكثير ، هي علاقة كثير بواحد .

٣ — أن عكس علاقة كثير بواحد ، هي علاقة واحد بكثير .

٤ — أن عكس علاقة كثير بكثير ، هي أيضا علاقة كثير بكثير (٢)

٥ — الترايط (أو الاتصال) Connexity (٣)

وهي الصفة التي تتصف بها العلاقة التي تربط بين أي حدين تختارهما جزافاً من أية مجموعة أو فئة ، مثل علاقة « أكبر من » التي تربط بين أي عددين تختارهما من بين متسلسلة الأعداد الصحيحة مثل علاقة « قبل » وعلاقة « بعد » ، وكذا علاقة « على يمين » أو « على يسار » بالنسبة لأي نقاط على خط مستقيم واحد . ويعرفها تارسكي

(١) المرجع السابق ، صفحة ٤٧

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٤٣

(٣) وقد وردت هذه الصفة في الترجمة العربية لكتاب رسل « مقدمة للفلسفة الرياضية » ، صفحة ٥٦ ، باسم « التواصل » .

بقوله: (بالنسبة لأي عضوين مختلفين س، ص في الفئة ١ ، إذا كانت إحدى الصيغتين التاليتين : س ع ص ، ص ع س ، صحيحة ، أي إذا كانت العلاقة ع تربط في اتجاه واحد على الأقل بين عنصرين جزائيين في الفئة ١ ، سميت هذه العلاقة ، بالعلاقة للترابطة) (١)

ملاحظات تتعلق بخصائص العلاقات :

أولاً : إن ذكرنا لأهم خصائص العلاقات على النحو السابق ، لا يعني أن تكون العلاقة إما متصفة بهذه الصفة فقط أو تلك . فليس هناك ما يمنع من إتصاف العلاقة الواحدة بأكثر من صفة . وهكذا يمكن أن تصور العدد الكبير من الصفات للركبة التي تتصف بها العلاقات ، أو بمعنى أكثر دقة عدد العلاقات ذات الخصائص للركبة ، لو أخذنا صفتين فقط من الصفات السابقة ، هما صفة التماثل بالنسبة لصفة التعدي مثلاً ، فإننا نستطيع التوصل إلى عدد لا يقل عن تسع صفات مركبة ، أو علاقات ذات صفات مركبة ، طالما أن كلا من صفتي التعدي والتماثل من أنواع ثلاثة ، فيكون ناتج التركيب مساوياً لـ : $3^2 = 9$ ، هي على سبيل المثال : —

- ١ — علاقة متعددة تماثلية ، مثل علاقة « يساوي » .
- ٢ — علاقة متعددة لا تماثلية ، مثل علاقة « سلف » ancestor .
- ٣ — علاقة متعددة جائزة التماثل ، مثل علاقة « يستلزم » .
- ٤ — علاقة لازمة تماثلية ، مثل علاقة « مجاور لـ » next door to .
- ٥ — علاقة لازمة لا تماثلية ، مثل علاقة « أب » .

٦ — علاقة لازمة جائزة التماثل ، مثل علاقة « أخ توأم » twin brother of .

٧ — علاقة جائزة التعدي تمائلية ، مثل علاقة « ابن عم » .

٨ — علاقة جائزة التعدي لا تمائلية ، مثل علاقة « خادم لـ » .

٩ — علاقة جائزة التعدي جائزة التماثل ، مثل علاقة « يعجب بـ » (١)

أما إذا أدخلنا في اعتبارنا الصفات الثلاث التالية : التعدي ، والتماثل ، والانعكاس ، فإننا نستطيع التوصل إلى عدد كبير من الصفات المركبة التي تتصف بها العلاقات ، تساوي $2^3 = ٨$ (٢) ، وهو عدد كبير من العلاقات نستطيع التوصل إليه من مثل هذا التأليف ، أو التركيب . وحق لا نخطئ في مثل هذا التركيب بين الصفات في العلاقات ، فإننا نستطيع إتباع بعض القواعد التي نهتدي بها في هذا العدد مثل : —

١ — إذا كانت العلاقة متعدية وتمامية ، فهي إنعكاسية ، مثل علاقة « يساوي » .

٢ — إذا كانت العلاقة متعدية ولا تمامية ، فهي لا إنعكاسية ، مثل علاقة « سلف » .

٣ — إذا كانت العلاقة متعدية ولا إنعكاسية ، فهي لا تمامية ، مثل علاقة « سلف » .

٤ — إذا كانت العلاقة تمامية ولا انعكاسية ، فهي إما أن تكون لازمة (مثل علاقة « مجاور لـ » next-door neighbor of) ، أو جائزة التعدي (مثل علاقة « مواز لـ » Parallel to) .

Lee, H. ; Symbolic Logic, p. 34.

(١)

(٢) وهذا العدد من العلاقات بعضه متداخل مع البعض الآخر .

٥ — إذا كانت العلاقة تماثلية وانعكاسية ، فهي إما أن تكون متعدية ، أو جائزة التعدى .

٦ — إذا كانت العلاقة لاتماثلية ، فهي لا انعكاسية (١)

ثانيا : كما يلاحظ أن العلاقات التى تصف بكونها لاتماثلية ، ومتعدية ومترابطة (٢) ، إنما تفيد معنى للترتيب بين الحدود الخاصة بهذه العلاقة . ويعبر رسل عن هذا بقوله : (عندما يكون لعلاقة هذه الخواص الثلاث ، فهي من قبيل تلك العلاقات التى تعطي ترتيبا للحدود التى تقوم بينها . وكلما وجد ترتيب ، فيمكن إيجاد علاقة ما لها هذه الخواص الثلاث التى تولد هذا الترتيب) (٣) ولناخذ لذلك مثلاً علاقة «أصغر من» بين فئة الأعداد الصحيحة ، فهي علاقة لاتماثلية فى أية فئة من الأعداد . وهذا ما نعبر عنه رمزيا كما يلي : —

$$(s \supset s) \supset (s \not\supset s) \quad (٤)$$

وهى أيضا علاقة متعدية ، وهذا مانعبر عنه رمزيا كما يلي : —

$$(s \supset s) . (s \supset s) : \supset : (s \supset s) .$$

كما أنها علاقة مترابطة ، طالما أنه من الضروري بالنسبة لأى عدد من مختلفين أن يكون أحدهما أصغر من الآخر . وهى أيضاً علاقة لا انعكاسية طالما أن أى عدد لا يكون أصغر من نفسه . وعلى ذلك فإن أية فئة من الأعداد يتم ترتيبها وفقاً لعلاقة أصغر من (٥) .

(١) للرجع السابق ، صفحة ٣٨

(٢) Tarski, A. : Introduction to Logic. P. 97.

(٣) رسل : مقدمه للفلسفه الرياضيه . (الترجمة العربية) ، صفحة ٥٤

(٤) أى أن : $(s \supset s) \supset (s < s)$.

(٥) Tarski, A. ; Introduction to Logic p. 67.

أهم العلاقات التي تنشأ بين العلاقات :

١ — علاقة التضمن :

وتسمى أحيانا باسم علاقة الاندراج . ويمكن تعريفها بالقول بأن العلاقة «ع» متضمنة في العلاقة «غ» أو مندرجة تحتها — باستخدام الرموز — على النحو الآتي :

$$. « ع \sqsubset غ »$$

إذا كان القول التالي صادقا : (كلما ربطت «ع» بين موضوعين ، ربطت كذلك «غ» بينهما بطريقة مماثلة) (١) . أو بعبارة أخرى فإنه بالنسبة لأي س ، ص ، إذا كانت الصيغة (س ع ص) تستلزم الصيغة (س غ ص) . وهذا ما يمكن التعبير عنه رمزيا بالصيغة : —

$$(س)(ص) [(س ع ص) \sqsubset (س غ ص)]$$

ولتوضيح ذلك ، نفترض أن «ع» ترمز للعلاقة «أصغر من» ، وأن «غ» ترمز للعلاقة «لا يساوي» . وعلى ذلك فإنه بوضع ما تدل عليه ع ، غ في الصيغة السابقة فإننا نحصل على : « بالنسبة لأي س ، ص ، إذا كانت س أصغر من ص ، كانت إذن س لا تساوي ص . وهذا ما نعبر عنه رمزيا بالصيغة :

$$(س)(ص) [(س > ص) \sqsubset (س \neq ص)]$$

ومن ثم تكون علاقة «أصغر من» متضمنة في علاقة «عدم التساوي» . وذلك يتضح من القول بأن «عدم التساوي» يتضمن ما هو «أصغر من» ، وما هو «أكبر من» . وهذا ما نعبر عنه بالصيغة التالية : —

$$(س)(ص) [(س \neq ص) \sqsubset (س > ص) \vee (س < ص)]$$

(١) المرجع السابق ، صفحة ٩٠ .

هذا ويلاحظ أن علاقة التضمن ، كعلاقة تقوم بين علاقات ، تتصف بأنها : —

إعكاسية : لأن أية علاقة يعكس أن تكون متضمنة في نفسها ، مثل :

ع د ع .

وجائزة التماثل : لأن الصيغة (ع د غ) لا تستلزم (غ د ع) كما أنها لا تسببها أيضاً . (ويلاحظ أنه لا يتم إستيفاء الصيغتين معاً إلا إذا كانت ع = غ) .
بمعنى أنه لو كانت : (س ع ص) د (س غ ص) ،

فإن هذا يستلزم أن تكون : (س غ ص) د (س ع ص) .

أو أن تكون : (س غ ص) د - (س ع ص) .

وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتي : —

[(س ع ص) د (س غ ص)] : د : [(س غ ص) د (س ع ص)]
٧ [(س غ ص) د - (س ع ص)]

أي : (ع د غ) : د : (غ د ع) ٧ (غ د ع)

ومتعدية : وهذا ما يعبر عنه رمزياً على النحو الآتي : —

(ع د غ) ٠ (غ د ر) : د : (ع د ر)

ويمكن توضيح ذلك بالمثال الآتي : —

لو كانت « ع » رمز لعلاقة « على اليمين المباشر » ، وكانت « غ » رمز لعلاقة « مجاور لـ » وكانت « ر » رمز لعلاقة « قريب من » near to ، إستطعنا أن نقول : لو كان منزلي على اليمين المباشر لمنزلك ، أي (س ع ص) ، فإنه يلزم عن ذلك أن يكون منزلي « مجاور » لمنزلك ، أي (س غ ص) . وإذا كان منزلي

مجاور لمزلك ، لزم عن هذا أن يكون منزلي قريباً من مزلك ، أى (س ر ص) .
ومن ثم تكون علاقة « على اليمين للبشر » وهى « ع » متضمنة فى علاقة « مجاور »
وهى « غ » ، وتكون علاقة « مجاور » متضمنة فى علاقة « قريب من » وهى
« ر » . وهذا ما نعبر عنه رمزياً كما يلى : —

$$[(س ع ص) \supset (س غ ص)] \cdot [(س غ ص) \supset (س ر ص)] \\ \vdots \vdots [(س ع ص) \supset (س ر ص)]$$

أى أن : (ع د غ) . (غ د ر) : د : (ع د ر) .

هذا ولا يفوتنا أن نذكر للملاحظين التاليتين الخاصتين بعلاقة التضمن : —

أولاً : إن علاقة التضمن علاقة منطقية أساسية ، وهذه إحدى النتائج الهامة التى
إنتهى إليها بيرس من دراسة منطق العلاقات . طالما أننا نستطيع أن نرد إليها كثيراً
من العلاقات الأخرى مثل علاقة الهوية ، وكذا التساوى وال لزوم وغيرها (١) .

ثانياً : إن علاقة التضمن إذا ما طبقناها على مستوى الفئات ، أو على مستوى
الأفراد الجزئية بالنسبة للفئات ، فإننا نحصل على علاقيتين : —

١ — علاقة دخول فئة فى فئة ، ورمزنا لها من قبل بالرمز « د » .

٢ — أو علاقة دخول فرد فى فئة ، ورمزنا لها من قبل بالرمز « د̄ » .

ويمكننا الآن أن نقارن بين هاتين العلاقتين ، من حيث الصفات التى تصف
بها كل منهما ، وذلك كما يلى : —

(١) انظر « مجموعة الأبحاث » Collected Papers لبيرس ، المجلد ٣ ، الفقرة
رقم ١٦٥ ، وكذا الدراسة التى نشرها للؤايف عن كتاب « للنطق الصحيح »
لبيرس فى مجلة تراث الإنسانية ، مجلد ٧ ، عدد ٢ .

أوجه الاختلاف :

العلاقة « \supset » : تتصف بكونها :—

١ — إنعكاسية : وهذا ما نعبر عنه بالرمز على النحو الآتي :—

$$. \supset \supset$$

٢ — ومتعدية : (١) ، ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلي :—

$$(\supset \supset) . (\supset \supset) : \supset : (\supset \supset)$$

٣ — وجائزة التماثل : فالصيغة ($\supset \supset$) لا تستلزم الصيغة ($\supset \supset$) كما

أنها لا تستلزمها (٢) . وهذا ما نعبر عنه رمزياً على النحو الآتي :—

$$(\supset \supset) : \supset : (\supset \supset) \vee (\supset \supset) .$$

أما العلاقة « \equiv » : فتتصف بكونها :

١ — لا انعكاسية : (٣) وذلك لأنها تربط بين مسـتويين مختلفين هما الفرد

والفئة . ومن ثم فهي لا تصلح لأرتباط الفرد مع نفسه بها ، ولا تصلح كذلك لإرتباط

الفئة مع نفسها بها . (٤) .

(١) Lee, H. : Symbolic Logic, p 55

(٢) Tarski, A, ; Introduction to Logic, P, q 8,

(٣) Lee, H, ; Symbolic Logic , P, 56,

(٤) وأن كان بعض المناطقة يرى — مثل كواين — أنها علاقة انعكاسية .

فقد ذهب كواين إلى أن إضافة معنى للصيغة التالية : (\equiv س) هو أقرب إلى \equiv

٢ — لازمة : (١) وذلك لأننا لو قلنا :

$$(س \equiv ١) \cdot (١ \equiv ب)$$

لما كان ذلك القول صحيحا ، لأن العلاقة « \equiv » لاتربط بين الفئات ، ومن ثم فلا تربط بين ا ، ب . وعلى ذلك فإذا لم تكن المقدمات التي تبدأ منها صحيحة فإن النتيجة التي قد نحصل عليها ، ستكون هي بدورها غير صحيحة .

٣ — لاتماثلية : لأنه لو كانت س ($\equiv ١$) ، فلا تكون ا متضمنة في س لأن الفئة لاتكون متضمنة في الفرد ، بل إن الفرد هو الذي يكون متضمنا في الفئة أو منتما إليها . أما عن التشابه بين هاتين العلاقتين فيتضح في أن كلا منهما علاقة غير مترابطة ، فضلا عن أن كلا منهما يفيد معنى الاندراج أو التضمن :

٢ — علاقة الهوية :

وليس المقصود هنا بالهوية ، هوية فئتين أو قضيتين ، بل الهوية بين علاقتين ، بمعنى أن تكون هناك علاقة هوية تربط بين علاقتين ، أو وجود تطابق ذاتي بينهما نعتبر عنه بالتساوي . فإذا كانت لدينا الصيغة التالية :-

$$ع = غ$$

\equiv معنى الهوية بين الفرد الواحد ونفسه . وقد علق على مثل هذا الرأي «لى» بقوله : لو كانت العلاقة « \equiv » علاقة انعكاسية ، لترتب على هذا رفض نظرية الأنماط عند رسل ، ولذا فهو يمدّها لا انعكاسية .

أنظر المرجع السابق صفحة ٦٠ .

(١) المرجع السابق ، صفحة ٥٦ .

كان معنى ذلك أن الملاحظين ع ، غ في هوية ، أو أنهما متطابقتان ذاتيا . وكما عرفنا في حساب الفئات أن تضمن فئتين إحداهما في الأخرى يستلزم القول بأن كلا من الفئتين مساوية للأخرى، فكذلك نقول في حالة العلاقات أن الملاحظين تتساويان حين تكون كل منهما متضمنة في الأخرى . ولقد عبر تارسكي عن هذا المعنى بقوله (إذا كانت ع \supset غ ، وكانت غ \supset ع ، قلنا أن الملاحظين ع ، غ إنا تقومان أو تربطان بين أشياء بعينها ، ومن ثم فهما متطابقتان ذاتيا أو هما في هوية ، أى أن ع = غ) (١) . ومن ثم فإن :

$$(ع \supset غ) \cdot (غ \supset ع) : \supset (ع = غ)$$

وبما أن ع = غ فإننا نستطيع أن نستبدل إحداهما بالأخرى فنحصل على :-

$$ع = ع \quad \text{ومن ثم على} \quad ع = ع \quad \text{وكذا} \quad ع = ع$$

$$\text{أو} \quad غ = غ \quad \text{ومن ثم على} \quad غ = غ \quad \text{وكذا} \quad غ = غ$$

وبما هو جدير بالملاحظة أن علاقة الهوية تتصف بكونها : —

١ — انعكاسية : لأن كل علاقة ترتبط مع نفسها بعلاقة الهوية . أى أن :

$$ع = ع$$

٢ — وتمائلية : لأن : (ع = غ) \supset (غ = ع) .

٣ — ومتعدية : لأن : (ع = غ) (غ = ر) : \supset (ع = ر) .

٣ - علاقة التباين أو الاختلاف Diversity

وتوجد بين أى علاقيتين مختلفتين متميزتين مثل ع ، غ . وهذا مايعبر عنه رمزيا على النحو الآتى :-

$$ع \neq غ$$

فإذا كنا قد عرفنا أن علاقة الهوية بين علاقيتين ، تنشأ حين تكون كل منهما متضمنة فى الأخرى . فإننا نستطيع تعريف علاقة التباين أو الاختلاف بأنها تلك التى تقوم بين العلاقتين اللتين لا تتضمن إحداهما الأخرى فى وقت واحد . ونحن فى هذه الحالة نعى أحد أمرين :-

(١) إما ألا يكون هناك أى تضمن بين إحداها والأخرى ، كما هو الحال بالنسبة لعلاقتى « أكبر من » ، « على يسار » . وهذا مايعبر عنه رمزيا على النحو الآتى :-

$$(ع \neq غ) : \supset : -(ع \supset غ) \cdot -(غ \supset ع) \cdot$$

$$\text{أو بالعكس :-} (ع \supset غ) \cdot -(ع \supset غ) : \supset : (ع \neq غ) \cdot$$

(ب) أو قد تكون إحداها تتضمن الأخرى ، بدون أن يكون العكس صحيحا . كما هو الحال بالنسبة لعلاقتى « على يمين » ، « مجاور لـ » . فعلاقة « على يمين » متضمنة فى علاقة « مجاور لـ » فى حين أن العكس غير صحيح ، إذ أن ما هو « مجاور لـ » قد يكون « على يمين » أو « على يسار » . ومن ثم فإننا نكتب :-

$$(ع \supset غ) \cdot -(ع \supset غ) : \supset : (ع \neq غ) \cdot$$

ومما هو جدير بالملاحظة أن علاقة التباين أو الاختلاف بين العلاقات ، تتصف بأنها :-

١ - تماثلية : لأنه إذا كانت $E \neq G$ ، كانت إذن $G \neq E$
وهذا ما نعبر عنه رمزيا كما يلي :-

$$(E \neq G) \supset (G \neq E) \cdot$$

وبالعكس ، أى أن : $(G \neq E) \supset (E \neq G) \cdot$

٢ - وبأنها ليست بالعلاقة للتعدي ، طالما أن الصيغتين :

$$(E \neq G) ، (G \neq R)$$

لا تستلزمان الصيغة : $(E \neq R)$ ^(١)

إذ من الممكن أن تكون : $(E = R) \cdot$

بل هي جائزة التعدي ، وهذا ما نعبر عنه رمزيا بالصيغة التالية :

$$(E \neq G) \cdot (G \neq R) : \supset (E \neq R) \vee (E = R)$$

٣ - وبأنها علاقة مترابطة أيضاً ، وهذا ما يمكن إدراكه لأول وهلة ، لأنه بالنسبة لأى علاقيتين نختارهما ، لابد وأن تكون إحداها متميزة عن الأخرى مختلفة عنها وإلا كانت هي والأخرى شيئاً واحداً .

الاستدلال الخاص بالعلاقات :

يمكن تناول الاستدلال الخاص بالعلاقات من زاويتين :-

أولا : من زاوية :

١ — الاستدلال على صحة قيام علاقات بين موضوعات وعلى خصائص هذه العلاقات فنحن نستدل مثلا على صحة :

(س ع و)

(أ) إذا كانت (س ع ص) ، وكانت (ص ع و) ، وإذا كانت « ع » علاقة متعدية .

(ب) أو إذا كانت (و ع س) ، وكانت « ع » علاقة تماثلية .

٢ — أو الاستدلال على صحة قيام علاقات بين موضوعات ، هي نفسها علاقات وفي الأمثلة التي أوردناها في هذا الفصل أو في الفصول السابقة ما يوضح هذا المعنى ، وخاصة ما يتصل بعلاقات الاندراج أو الهوية أو الاختلاف والتباين .

ثانياً : أو من زاوية قيام الاستدلال أساسا على العلاقات ، فإذا كان يرسى يعتبر أن كل ما هو منطقي إنما يرتد إلى العلاقات ، فإننا نعتبر كذلك أن كل ما هو استدلالى قائم أساسا على العلاقات ، سواء كان هذا الاستدلال خاصا بحساب القئات أو القضايا أو دالات القضايا أو كذلك بالعلاقات نفسها . وفي هذا الصدد نقول إستينج : (إن كل استدلال إنما يتوقف على الخصائص المنطقية للعلاقات ومن ثم فإن تصور « العلاقة » ، تصور أساسى جدا في كل استدلال) (١) . ولعل هذا المعنى

Stebbing, S, ; A, Modern Introduction to Logic, P, 166, (١)

الذى نشر إليه يكون واضحا من أنواع الاستدلالات السابق ذكرها على طول هذا الكتاب ، ولعله يكون أكثر وضوحا في الحساب التحليلي الخاص بالنظرية العامة للاستدلال ، وهو موضوع يخرج عن نطاق كتاب تمهيدى مبسط كهذا الذى بين أيدينا . ولعلنا نستطيع قريبا أن نقدم دراسة لهذه النظرية التى تعتبر بمثابة التعبير الصورى المجرد لأى بناء منطقى رمزى .

قائمة

بأهم الرموز المستخدمة في الكتاب

أولا : رموز خاصة بحساب الفئات

متغيرات للمفردات الجزئية .	س ، ص ، ...
متغيرات للفئات .	ا ، ب ، ح ، ..
وتعني إندراج فئة في فئة أخرى . (ا ب) .	\supset
وتعني إتياء عضو واحد مفرد إلى فئة ما . (س (-)	\in
وتعني « أو » للجمع أو الفصل الضعيف بين الفئات .	+
وتعني « إما ... أو » للجمع أو الفصل القوي بين الفئات .	$(+)$
للضرب للمنطق بين الفئات .	\times
للطرح للمنطق بين الفئات .	-
لنفي الفئة ا .	\bar{a}
لنفي للزدوج للفئة ا .	\bar{a}
وتعني الهوية بين الفئات .	=
وتعني عدم الهوية بين الفئات أو اختلافها .	\neq
رمز للفئة الشاملة . (أو عالم للقال) .	1
رمز للفئة الفارغة .	صفر

ثانياً : رموز خاصة بحساب القضايا

متغيرات للقضايا .	و ، ل ، م ، ...
لنفي القضية .	-
للضرب المنطقي بين القضايا .	•
وتعني « أو » للجمع أو الفصل الضيف .	∨
وتعني « إما ... أو » للجمع أو الفصل القوي .	($\bar{\vee}$)
وتعني التكافؤ بين القضايا .	\equiv
وتعني عدم التكافؤ .	\longleftrightarrow
وتعني اللزوم بين القضايا .	\supset
أى أن : و كاذبة دائماً .	و = صفر
أى أن : و صادقة دائماً .	و = ١
وتعني الصدق في القضية .	ص
وتعني الكذب في القضية .	ك

ثالثاً : رموز خاصة بحساب الدالات

متغيرات الدالة .	د ، و ، ...
رموز لمتغيرات الدالة .	س ، ص ، ...
رمز للسور الكلى الموجب .	(س)
رمز للسور الوجودى الجزئى .	(\exists س)
رمز للسور الوجودى للفرد .	(\exists ١)

رابعاً : رموز خاصة بحساب العلاقات

متغيرات العلاقة .	ع ، غ ، ر ، ...
نفي العلاقة .	ع
عكس العلاقة .	ع̂
الضرب بين العلاقات .	∩
للجمع بين العلاقة .	∪
الضرب النسبي للعلاقات .	/
وتفيد معنى الهوية بين العلاقات .	=
وتفيد معنى الاختلاف والتباين بين العلاقات .	≠

=====

قائمة بأهم المراجع

أولا : المراجع العربية

- ١ — ابن تيمية : الرد على المنطقيين .
(المطبعة القيمة في بمباى بالهند عام ١٣٦٨ هجرية / ١٩٤٩ ميلادية .
نشر عبد الرحمن شرف الدين المكتبي) .
- ٢ — برتراند رسل : أصول الرياضيات . (الجزء الأول)
ترجمة عربية بقلم : الدكتور محمد مرسى أحمد ، والدكتور أحمد فؤاد
الأهوانى . (دار المعارف ، القاهرة ، ١٩٥٨) .
- ٣ — برتراند رسل : مقدمة للفلسفة الرياضية .
ترجمة عربية بقلم : الدكتور محمد مرسى أحمد ، مراجعة الدكتور أحمد
الأهوانى . (نشر مؤسسة سجل العرب ، القاهرة ١٩٦٢) .
- ٤ — د. زكى نجيب محمود : للنطق الوضعى . (الجزء الأول)
(مكتبة الأنجلو المصرية ، القاهرة ، الطبعة الرابعة ١٩٦٥) .
- ٥ — د. عبد الرحمن بدوى : للنطق الصورى والرياضى .
(مكتبة النهضة المصرية ، القاهرة ، الطبعة الثانية ١٩٦٣) .
- ٦ — لديج فنجشتين : رسالة منطقية فلسفية .
ترجمة عربية بقلم الدكتور عزمى إسلام . (مكتبة الأنجلو المصرية ،
القاهرة ١٩٦٨) .

٧ — يان لوكاشيفتش : نظرية القياس الأرسطية « من وجهة نظر للنطق الصوري الحديث » .

ترجمة عربية بقلم الدكتور عبد الحميد صبره . (منشأة المعارف ،
الإسكندرية ، ١٩٦١) .

ثانياً : المراجع الأجنبية

- 1 — *Ayer, A. J.* : (editor) : Logical Positivism.
(The Free Press of Glencoe, U.S.A., 4th printing, 1963).
- 2 — *Bacon, F.* : Novum Organum.
- 3 — *Boole, G.* : Studies in Logic and Probability.
(Watts & Co., London, 1952)
- 4 — *Boole, G.* : The Mathematical Analysis of Logic.
(in : Studies in Logic and Probability)
- 5 — *Carnap, R.* : Introduction to Symbolic Logic, and its Applications.
(Dover Publications, a paperback edition, U.S.A. 1958)
- 6 — *Carruccio, E.* : Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought.
(Faber & Faber, London, 1964).
- 7 — *Church, A.* : Introduction to Mathematical Logic. Vol. I.
(Princeton, New Jersey, U.S.A. Princeton University Press, 1956).
- 8 — *Cohen, M. & Nagel, E.* : An Introduction to Logic.
(Routledge & Kegan Paul, a paperback edition, 1964).
- 9 — *Feibleman, J.K.* : An Introduction to Peirce's Philosophy.
(George Allen & Unwin, London, 1960)
- 10 — *Geach M Black, M.* : Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.
(New York, 1952)
- 11 — *Hilbert, D. & Ackermann, W.* : Principles of Mathematical Logic.

- (Chelsia Publishing Company, New York, 1950).
- 13 — *Kneale, W. & Kneale, M.* : The Development of Logic.
(Oxford, at the Clarendon Press, England, 1966).
- 14 — *Kotarbinski T.* : *Lessons sur l'Histoire de la Logique.*
(Presses Universitaires De France, Paris, 1964).
- 15 — *Langer, S.* : *An Introduction to Symbolic Logic.*
(Dover Publications, 2nd Paperback edition, New York, 1953).
- 16 — *Lee, H.N.* : *Symbolic Logic.*
(Routledge & K. Poul, London, 1962)
- 17 — *Martin, R.* : *Logique Contemporaine et Formalisation.*
(Presses Universitaires De France, Paris, 1964).
- 18 — *Mourant, J.A.* : *Formal Logic :*
(the MacMillan Co. New York, 1963)
- 19 — *Quine, W.V.O.* : *Mathematical Logic.*
(Harvard University Press, U.S.A., 1951)
- 20 — *Reichenbach. H.* : *Elements of Symbolic Logic.*
(a paperback edition,, The Free Press, New York, 1966).
- 21 — *Schipper, E.W. & Schuh* : *A First Course in Modern Logic.*
(Methuen & Co. London, 7th. edition, 1950).
- 23 — *Tarski, A.* : *Introduction to Logic, "and the Methodology of Deductive Sciences".*
(Oxford University Press, New York, 8 th. printing, 1959).
- 24 — *Venn, J.* : *Symbolic Logic.*
(London, 1881).

كتب أخرى للمؤلف :

- ١ — جون لوك — دار المعارف ، القاهرة ١٩٦٤ .
- ٢ — لدفيج فنجنشتين — دار المعارف ، القاهرة ١٩٦٧ .
- ٣ — رسالة منطقية فلسفية . (لدفيج فنجنشتين) ترجمة عربية —
الأنجلو المصرية ، القاهرة ١٩٦٨ .

تصويبات الرموز

الصواب	الخطأ	السطر	الصفحة
آ	ا	١٨	٣٦
(ا + ا)	(آ + ا)	١١	٤٤
(ح د ز)	(ا ن ح)	٨	٦٦
أ	ا	الأخير	٨٩
ا	ا	١٠	٩٥
د	≡	الأخير	٩٦
ا	ا	٤	١٠١
لا ا هي ا	لا ا هي ا	٩	١٠٦
ا آ = صفر	ا ا = صفر	١٢	١٠٦
هي ا	هي ا	٨	١٠٧
هي ا	هي ا	١٠	١٠٨
- (س ≡ ا)	س - (ا ≡ ا)	٤	١١٠
د - ا)	د ا)	٨	١١١
ا	ا	٥	١٢٤
ا ا + ا ا	ا / ا + ا / ا	١٠	١٢٦
ا ا	ا / ا	١٠	١٢٧
ا ا	ا / ا	١٠	١٢٨

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٣١	الأخير	ح ح	ح ح
١٣٥	١٤	(ح + ح)	(ح + ح)
١٣٦	١٨	ح ا	ح ا
١٣٧	٩	= ١ X	= ١ X
١٣٧	١٣	ا = صفر	ا = صفر
١٥٦	الأخير	ا =	ا =
١٥٧	١٣	ح ح	ح ح
١٦٨	٥	ل	ل
١٧٣	١٢	م د ن	م د ن
١٨٨	١	(ل . م)	(ل . م)
١٩١	٧	(ل . ح)	(ل . ح)
٢٤٠	العمود ٦	ضع له بدلا من ص في جميع القيم	
٢٨٨	١٣	د س (.)	د س (.)
٢٨٨	١٦	د س	د س
٢٨٨	١٧	د س .	د س .
٢٩٤	٤	د	د
٢٩٤	٥	د	د
٢٩٧	٦	د ص	د ص
٣٠٧	٤	د س	د س
٣٠٧	١١	(د س)	(د س)
٣٢١	٧	ه س . د س	ه س . د س

رقم الايداع بدار الكتب ٢١٨٩ لسنة ١٩٧٠

مطابع سجل العرب

تابع بيان الكفة - ٩ - عماد الدين : الفاضل

تلفون - ۹۳۴۷۰۶

Bibliotheca Alexandrina



0647001